Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Mengen und Mengenoperationen

Dozentin: Wiebke Petersen

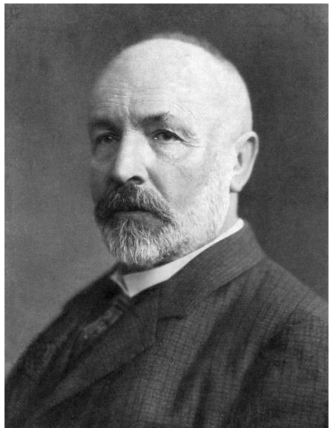
1. Foliensatz

Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente'genannt werden) zu einem Ganzen."

- Mengen werden über ihre Elemente bestimmt.
- Elemente von Mengen können selber Mengen sein.
- Mengen können endlich oder unendlich sein.



Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann identisch oder gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die leere Menge (Symbol: $\emptyset$, es gilt $\emptyset = \{\ \}$).
- Mengen mit genau einem Element werden Einermengen (*singleton*) genannt.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen (alle ‚Bruchzahlen').
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen (alle ‚Kommazahlen').

Bertrand Russell (1872-1970)

Russels Antinomie (1901)

Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Ausweg: ‚Theorie der Typen' (Principia Mathematica, Russel & Whitehead 1910-13)

Mengen werden stufenweise aufgebaut und sind immer von einem höheren Typ als ihre Elemente.

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiSSe

autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, ...)

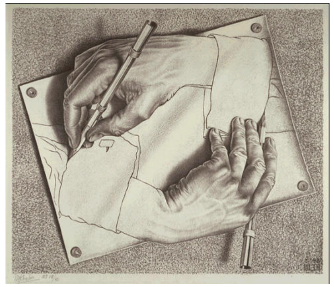
heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Ist ‚heterologisch' heterologisch?

(nach D.R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach*)

In diesem Kurs werden Mengen so beschrieben, dass keine Paradoxien auftreten.

Paradoxien der Selbstbezüglichkeit



zeichnende Hände von M.C. Escher

Mengenbeschreibungen

Explizite Mengendarstellung

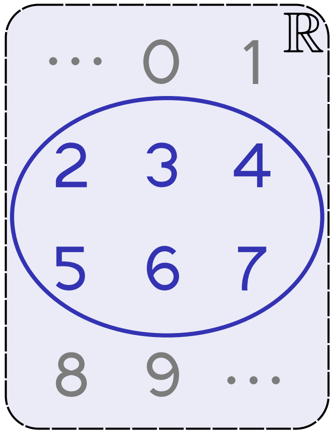
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enthält.

Beispiel:
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Implizite Mengendarstellung

$\{x|A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel:
$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N}$ und $1 < x$ und $x < 8\}$,



Hinweise zur expliziten Mengendarstellung

Beschreibung durch Aufzählung oder -listung

nur für endliche Mengen möglich

Die Klammern { und } heiSSen Mengenklammern oder geschweifte Klammern.

Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle:
$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$

Elemente können in der Klammernotation mehrfach auftreten:
$\{a, b, c\} = \{a, b, a, b, a, b, c\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels charakteristischer Eigenschaft

$\{$ Element $\in$ Grundbereich | Eigenschaft von Element $\}$

$\{x \in G | E(x)\}$ („Menge aller x in G mit der Eigenschaft E“)

Bsp.: $\{x \in \mathbb{N} | x$ ist eine gerade Zahl$\}$

Wenn der Grundbereich aus dem Kontext bekannt ist oder sich aus der Eigenschaft ergibt, kann er weggelassen werden.

Bsp.: $\{x | x$ ist eine Primzahl$\}$

Statt des Symbols '|' verwendet man auch das Symbol ':'. Also $\{x \in \mathbb{N} : x$ ist eine Primzahl$\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

Festlegung endlich vieler Startelemente:
Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor

Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:
Wenn x ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von x ein Nachkomme von Cantor.

Einschränkung:
Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

Was ist, wenn Cantor keine Kinder hatte?

Lässt sich so auch die Menge der Nachkommen von Aristoteles definieren? oder die von Merlin?

Teilmengen

Eine Menge N ist eine Teilmenge der Menge M (in Zeichen: $N \subseteq M$) genau dann, wenn alle Elemente von N auch Elemente von M sind.

Wenn $x \in N$, dann $x \in M$

Wenn $y \in M$, dann muss $y \in N$ nicht unbedingt gelten, es kann aber gelten.

Eine Menge N ist eine echte Teilmenge der Menge M (in Zeichen: $N \subset M$) genau dann, wenn N eine Teilmenge von M ist und wenn M und N ungleich sind.

$N \subseteq M$ und $N \neq M$

Es gibt ein $y \in M$ mit $y \notin N$.

Wenn $N \subseteq M$, dann ist M eine Übermenge von N (in Zeichen: $M \supseteq N$).

Wenn $M \supseteq N$ und $M \neq N$ dann ist M eine echte Übermenge von N (in Zeichen: $M \supset N$).

Teilmengen

$\boldsymbol{x \in M}$: x ist ein Element der Menge M

$2 \in \{1,2,3\}$
$2 \notin \{1,3,5\}$
$\{3\} \in \{M | M$ ist eine Einermenge$\}$
$\{3\} \notin \{3\}$

$\boldsymbol{N \subseteq M}$: Die Menge N ist eine Teilmenge der Menge M

$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$
$\{2,3\} \subseteq \{2,3\}$
$\emptyset \subseteq \{1,2,3,4\}$
(Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge!)
$\{3\} \not\subseteq \{M | M$ ist eine Einermenge$\}$

$\boldsymbol{N \subset M}$: Die Menge N ist eine echte Teilmenge der Menge M

$\{1\} \subset \{1,2\}$
$\{1,2\} \not\subset \{1,2\}$

Vorsicht: Die Element-von- und die Teilmengenrelation müssen streng unterschieden werden!

Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen M und N haben dieselbe Mächtigkeit oder heiSSen gleichmächtig (in Zeichen: $|M| = |N|$), wenn es eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von M auf N gibt (d.h., die Zuordnung ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N und jedem Element aus N genau ein Element aus M zu.)

endliche Mengen

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge (in Zeichen: $|M|$) ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele:

$|\emptyset| = 0$

$|\{1,2\}| = 2$

$|\{\{1,2\}\}| = 1$

Vorsicht: nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig!

Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

Mengenoperationen sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch unäre und zweistellige auch binäre Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M, also $\mathcal{POT}(M) = \{N | N \subseteq M\}$. Man schreibt auch 2^M für die Potenzmenge von M.

$$\mathcal{POT}(\{1,2,3\}) = \left\{ \begin{array}{l} \{\quad\quad\quad\}, \\ \{1\quad\quad\}, \\ \{\quad 2 \quad\}, \\ \{\quad\quad 3\}, \\ \{1, 2\quad\}, \\ \{1, \quad 3\}, \\ \{\quad 2, 3\}, \\ \{1, 2, 3\}, \end{array} \right\}$$

Mächtigkeit der Potenzmenge

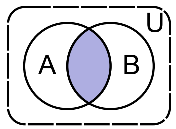
Für endliche Mengen gilt: ist M eine n-elementige Menge, so ist $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
0	0	1	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1
2×	2×	2×	...	2

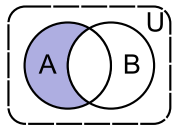
2^n Möglichkeiten

Mengenoperationen (binäre Operationen)

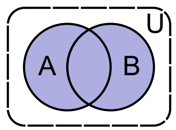
Schnitt: $A \cap B$
„A geschnitten mit B"
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$



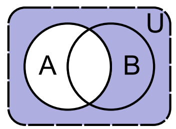
Differenz: $A \setminus B$ (oder $A - B$)
„A ohne B"
$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$



Vereinigung: $A \cup B$
„A vereinigt mit B"
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$



Komplement (in U): $C_U(A)$
„Komplement von A in U"
$C_U(A) = U \setminus A$



Wenn U feststeht, schreibt man auch $\overline{A}$

Mengenoperationen

Beispiele

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 2\}$, $\overline{A} = \{5, 6, 7\}$

Notation

Zwei Mengen A und B mit leerem Schnitt heiSSen disjunkt ($A \cap B = \emptyset$).

Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcup A$ für die Vereinigung aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcup\{B, C, D\} = B \cup C \cup D$)

Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcap A$ für den Schnitt aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcap\{B, C, D\} = B \cap C \cap D$)

Häufig werden auch Indizes und Indexmengen zur Notation verwendet. Bsp.: Sei $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 | x \leq i\}$, dann

$$\bigcup_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \bigcap_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3\}$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

$\emptyset$ ist neutrales Element der Vereinigung: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Gibt es auch ein neutrales Element des Schnitts?

Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

weitere Gesetze:

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} \cap A = \emptyset$$

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Relationen und Funktionen

Dozentin: Wiebke Petersen

2. Foliensatz

n-Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n-Tupel

Ein n-Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.
Beispiel: $\langle 2, 3, 1\rangle$, $\langle b, e, e, s, i, i, p, l\rangle$
2-Tupel werden auch (geordnete) Paare genannt.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n-Tupel deren i-tes Element aus M_i stammt.
$M_1 \times \ldots \times M_n := \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$

Statt $M \times M \times \ldots \times M$ schreibt man auch M^n, wenn M genau n-mal auftritt.

Beispiel

$M_1 = \{a, b, c\}$, $M_2 = \{a, d\}$
$M_1 \times M_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, d\rangle\}$
$M_1 \times \emptyset = \emptyset$

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heiSSt n-stellige Relation.
Eine Relation R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Hinweis: Relationen werden extensional definiert. Es ist unerheblich, wie die Relation charakterisiert (oder benannt) wird. Wichtig ist allein, welche Objekte zueinander in der Relation stehen.
Für Relationen werden häufig die Buchstaben R, S, T verwendet.

Beispiele

- Schwester von
- Mutter von
- weibliches Elternteil von
- bilden ein Quartet
- Teilmenge von

binäre Relationen

binäre Relationen sind Mengen geordneter Paare

wenn a in der Relation R zu b steht, dann schreibt man

- $\langle a, b\rangle \in R$ oder
- aRb oder
- $R(a, b)$ oder
- Rab

Wenn $R \subseteq A \times B$, dann sagt man, dass R eine Relation zwischen A und B ist.

Wenn $R \subseteq A \times A$, dann sagt man, dass R eine Relation auf A ist.

inverse und komplementäre Relation

inverse Relation

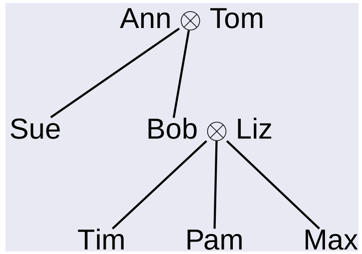
Die inverse Relation zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ ist die Relation
$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \in B \times A | \langle a, b\rangle \in R\}$.

komplementäre Relation

Die komplementäre Relation zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen A und B ist die Relation
$R' = A \times B \setminus R$.

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie

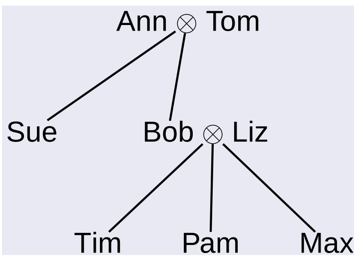


‚hat als Sohn'

Ann	R_{son}	Bob
Tom	R_{son}	Bob
Bob	R_{son}	Max
Bob	R_{son}	Tim
Liz	R_{son}	Max
Liz	R_{son}	Tim

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie



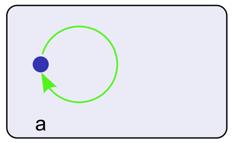
‚hat als Mutter'

Sue	R_{mother}	Ann
Bob	R_{mother}	Ann
Tim	R_{mother}	Liz
Pam	R_{mother}	Liz
Max	R_{mother}	Liz

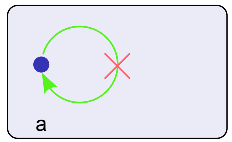
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa



Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag' auf der Menge der Menschen ist reflexiv.

Die Relation ‚ist Mutter von' auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.

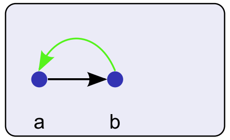
Die Relation ‚kann die Quersumme des Geburtstags von berechnen' auf der Menge der Menschen ist weder reflexiv noch irreflexiv.

Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

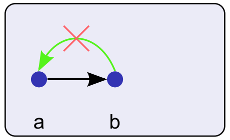
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

Die Relation ‚ist verheiratet mit' ist symmetrisch.

Die Relation ‚ist gröSSer als' ist asymmetrisch.

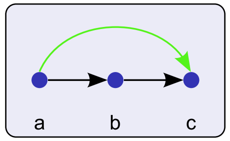
Die Relation ‚ist Teilmenge von ' ist antisymmetrisch.

Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

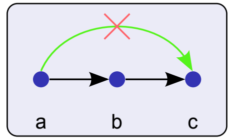
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.



Die Relation ‚ist Vorfahr von' ist transitiv.

Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als' ist intransitiv.

Die Relation ‚kennt' ist weder transitiv noch intransitiv.

Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Definitions- und Wertebereich einer Relation

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation ist, dann heiSSt

$$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

der Definitionsbereich (domain) von R.
Die Menge

$$\text{rng}(R) = \{b \in B \mid \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

heiSSt der Wertebereich (range) von R.

Beispiel:

$$A = \{a, b, c, d\}, \; B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; R = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$\text{dom}(R) = \{b, c\}, \; \text{rng}(R) = \{1, 2, 3\}$$

Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation auf A, g.d.w. R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wenn R eine Äquivalenzrelation ist und aRb gilt, dann sagt man, dass a äquivalent ist zu b bezüglich R.

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Symbol $\sim$.

Beispiele:

- Gleichheit
- ist im selben Semester wie
- hat gleich viele Elemente wie
- hat die selbe Farbe wie
- Welche der Beispielrelationen an der Tafel sind Äquivalenzrelationen?

Äquivalenzrelation

Äquivalenzklasse

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Die Äquivalenzklasse eines Elements $a \in A$ ist die Menge aller zu a äquivalenten Elemente von A, also

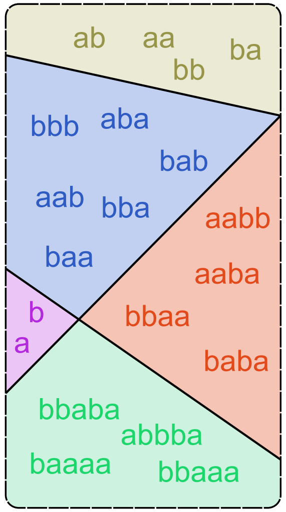
$$[a]_R = \{b \in A | aRb\}.$$

Die Menge

$$A/R = \{[a]_R | a \in A\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus A bezüglich R heiSSt Quotient von A bezüglich R.

Hinweis: Äquivalenzklassen können per Definition nicht leer sein.



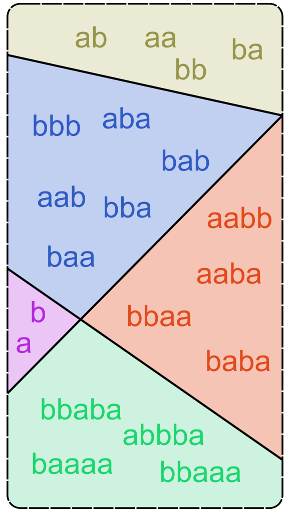
Äquivalenzrelation

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Dann gilt:

> Zwei Äquivalenzklassen von R sind entweder disjunkt oder identisch: für alle $a, b \in A$ gilt entweder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ oder $[a]_R = [b]_R$.
> Die Äquivalenzklassen von R decken ganz A ab: $\bigcup A/R = A$.

Eine Menge $P \subseteq \mathcal{POT}(A)$ ist eine Partition (oder disjunkte Zerlegung) von A, g.d.w. $\bigcup P = A$ und für alle $X, Y \in P$ mit $X \neq Y$ gilt $X \cap Y = \emptyset$.

Folglich bildet der Quotient einer Äquivalenzrelation eine Partition der Grundmenge.

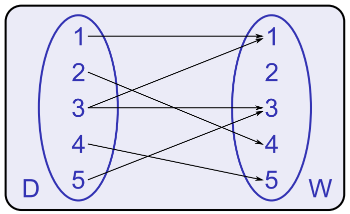


Funktionen

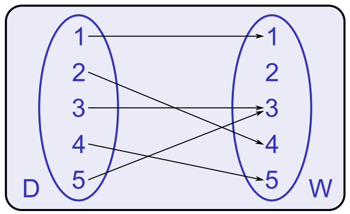
Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine Funktion (oder Abbildung), wenn sie jedem Element aus D genau ein Element aus W zuordnet.
Funktionen müssen also die Bedigungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

*Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y\rangle \in R$.*



Eindeutigkeit: Wenn $\langle x, y\rangle \in R$ und $\langle x, z\rangle \in R$, dann $y = z$.



Eine Relation, für die die Eindeutigkeitsbedingung (aber nicht unbedingt die Existenzbedingung) gilt, heiSSt partielle Funktion.

Notation und Terminologie

Für Funktionen verwendet man häufig die Buchstaben f, g, h, F, G, H.

Wenn $f \subseteq A \times B$ eine Funktion ist, dann sagt man, dass f eine Funktion von A nach B ist, und schreibt $f : A \to B$. A wird dann der Definitionsbereich und B der Wertebereich von f genannt.

Wenn $\langle a, b\rangle \in f$, dann sagt man, dass die Funktion f dem Element a den Wert b zuweist, und schreibt $f(a) = b$ oder $f : a \mapsto b$.

Elemente des Definitionsbereiches heiSSen Argumente und Elemente des Wertebereiches heiSSen Werte einer Funktion.

Wenn $C \subset A$ und $f : A \to B$, dann bezeichnet $f|_C : C \to B$ die Einschränkung der Funktion f auf C. Für alle $c \in C$ gilt $f|_C(c) = f(c)$.

Im Kontext von partiellen Funktionen werden Funktionen, die die Existenzbedingung erfüllen, häufig totale Funktionen genannt.

Beispiele

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ ist keine partielle Funktion.

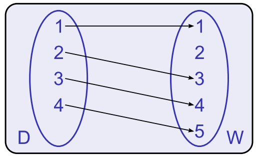
Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine partielle aber keine totale Funktion.

Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine totale und folglich auch eine partielle Funktion.

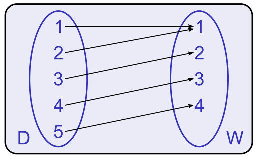
Funktionseigenschaften

Sei $f : D \to W$ eine Funktion.

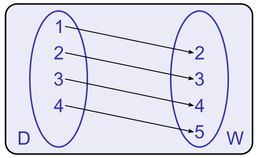
f ist injektiv (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
$f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



f ist surjektiv (Engl.: onto), wenn jedes Element von W mindestens einem Element von D als Wert zugewiesen wird. Wenn es also für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt.

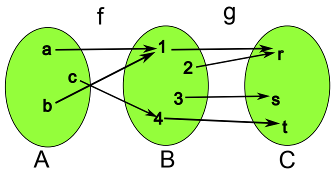


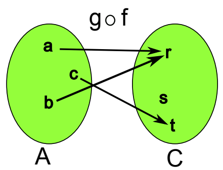
f ist bijektiv, wenn f *injektiv* **und** *surjektiv* ist.
Merke: Eine Funktion f ist bijektiv, g.d.w. f^{-1} eine Funktion ist.



Komposition von Funktionen

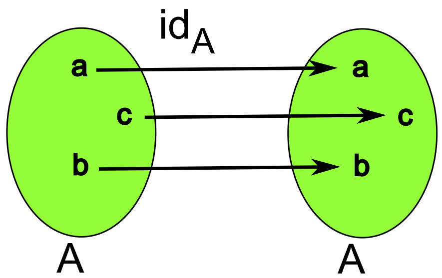
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen. Die Funktion $g \circ f : A \to C$ mit $g \circ f = \{(x, z) \in A \times C \mid$ es gibt ein $y \in B$ mit $(x, y) \in f$ und $(y, z) \in g\}$ ist die Komposition (oder Verkettung) von f und g.
Es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Die Funktion $g \circ f$ weist einem Element $x \in A$ das Element aus C zu, das man erhält, wenn man zunächst f auf x anwendet und auf das Ergebnis noch g anwendet.





Identitätsfunktion

Die Funktion $id_A : A \to A$ mit $f = \{(a, a) \in A \times A\}$ (oder $f(a) = a$ für alle $a \in A$) heiSSt die Identität(sfunktion) auf A.



mehrstellige Funktionen

Der Definitionsbereich einer Funktion kann selbst eine Relation sein.

Eine Funktion $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ heiSSt n-stellige Funktion.

Beispiel: Die Addition der natürlichen Zahlen $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ kann als zweistellige Funktion aufgefasst werden.

Zweistellige Operationen bilden zweistellige Funktionen (Bsp.: Schnitt, Vereinigung, ...).

n-stellige Funktionen sind $n+1$-stellige Relationen (Bsp: Mutter)

Charakteristische Funktion einer Teilmenge

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ lässt sich mithilfe ihrer charakteristischen Funktion beschreiben.
Die charakteristische Funktion einer Teilmenge $N \subseteq M$ ist die Funktion $\chi : M \to \{0,1\}$, für die gilt: $\chi(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in N$.
Für die charakteristische Funktion von $N \subseteq M$ schreibt man häufig auch χ_N.
Es gilt:

$$\chi_N : M \to \{0,1\}; \quad \chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} x \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mengen von Funktionen

Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Funktionen von N nach M. Also:

$$M^N = \{f : N \to M \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

Charakteristische Funktion und Potenzmenge

Wir haben gesehen, dass man für die Potenzmenge einer Menge M auch 2^M schreiben kann. Warum?
In 2^M steht 2 für die 2-elementige Menge $\{0,1\}$.
Die Potenzmenge einer Menge M lässt sich als Menge aller charakteristischen Funktionen ihrer Teilmengen auffassen:

$$\mathcal{POT}(M) = 2^M = \{f : M \to \{0,1\} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

formale Sprachen

Dozentin: Wiebke Petersen

3. Foliensatz

Alphabete und Wörter

Definition

- Alphabet Σ: endliche Menge von Symbolen / Zeichen.
- Wort: eine endliche Kette/Folge $x_1 \dots x_n$ von Symbolen/Zeichen eines Alphabets (mit $n \geq 0$). Das Wort, das aus null Zeichen besteht heiSSt leeres Wort und wird mit ε bezeichnet.
- Die Menge aller Wörter über einem Alphabet Σ bezeichnen wir mit Σ^*.
- $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ ist die Menge der nichtleeren Wörter.
- Länge eines Wortes $|w|$: Gesamtzahl der Zeichen eines Wortes w ($|abbaca| = 6$, $|\varepsilon| = 0$)

Leersymbol, leeres Wort und leere Menge

Vorsicht Verwechslungsgefahr!

Das Leersymbol ␣ ist ein *Zeichen* des Alphabets, also ist ein Wort, das nur aus dem Leersymbol besteht, ein Wort der Länge 1.

Das leere Wort ε ist ein *Wort* der Länge 0.

Die leere Menge $\emptyset$ ist eine *Menge*.

Übung: Alphabete und Wörter

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet:

- Geben Sie zwei Wörter der Läge 4 über Σ an.
- Welche der folgenden Ausdrücke sind Wörter über Σ und welche Länge haben sie?:
  'aa', '$caab$', 'da'
- Was ist der Unterschied zwischen Σ^*, Σ^+ und Σ?
- Wieviele Elemente haben Σ, Σ^* und Σ^+?

Operationen auf Wörtern

Verkettung / Konkatenation

Die Konkatenation / Verkettung zweier Wörter $u = a_1 a_2 \dots a_n$ und $v = b_1 b_2 \dots b_m$ mit $n, m \geq 0$ ist

$$u \circ v = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

Häufig schreiben wir uv statt $u \circ v$.

$$w \circ \varepsilon = \varepsilon \circ w = w \quad \text{Neutrales Element}$$

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w \quad \text{Assoziativität}$$

Ist die Konkatenationsoperation kommutativ?

Symbolpolitik der Mathematik

Vorsicht:

- Obwohl die Symbole für die Komposition von Funktionen und die Konkatenation von Wörtern übereinstimmen, handelt es sich um unterschiedliche Operationen!
- In der Mathematik finden sie häufig mehrdeutige Symbole, deren Bedeutung sich aus dem jeweiligen Kontext ergibt.
- Sie müssen sich also bei dem Symbol $\circ$ immer fragen, ob es zwischen Funktionen oder Wörtern steht (wir werden auch noch eine Operation auf Mengen kennenlernen, die mit demselben Symbol bezeichnet wird).
- Bedenken Sie, dass die Alternative die Verwendung einer unbegrenzten Zahl verschiedener Symbole wäre, da es theoretisch unendlich viele Operationen gibt. Jedes dieser Symbole müsste in Zeichensätzen vorgehalten werden, was unmöglich ist, da Alphabete endlich sein müssen. Stellen Sie sich auSSerdem vor, ich würde an der Tafel versuchen eine Vielzahl von sehr ähnlichen Symbolen zu verwenden (Beispiel: Kreis mit dickem Punkt in der Mitte, Kreis mit kleinem Punkt, Kreis ohne Punkt, Kreis mit zwei Umrandungen,...), Sie würden das nicht lesen wollen!

Operationen auf Wörtern

Exponenten

- w^n: w wird n-mal mit sich selbst verkettet.
- $w^0 = \varepsilon$: w wird '0-mal' mit sich selbst verkettet.

Umkehrung

- Die Umkehrung eines Wortes w wird mit w^R bezeichnet. $(abcd)^R = dcba$.
- Ein Wort w, für das $w = w^R$ gilt, heiSSt Palindrom.

(madam, reliefpfeiler, otto, anna, regallager ...)

Übung: Operationen auf Wörtern

Seien $w = aabc$ und $v = bcc$ Wörter, ermitteln Sie:

- $w \circ v$
- $((w^R \circ v)^R)^2$
- $w \circ (v^R \circ w^3)^0$

Formale Sprache

Definition

Eine formale Sprache L ist eine Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ, also $L \subseteq \Sigma^*$.

Beispiele:

- Sprache L_{rom} der gültigen römischen Zahldarstellungen über dem Alphabet $\Sigma_{rom} = \{\mathbf{I}, \mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{M}\}$.
- Sprache L_{Mors} der Buchstaben des lateinischen Alphabets dargestellt im Morsecode. $L_{Mors} = \{\cdot -, - \cdot \cdot\cdot, \dots, - - \cdot\cdot\}$
- Sprache L_{pal} der Palindrome im deutschen Duden $L_{pal} = \{\text{Madam, reliefpfeiler, } \dots\}$
- Leere Menge
- Menge der Wörter der Länge 13 über dem Alphabet $\{a, b, c\}$
- Sprache der syntaktisch wohlgeformten Java-Programme
- Deutsch?

Operationen auf Sprachen

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ und $K \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen über dem Alphabet Σ, dann entstehen durch die Verknüpfung mit Mengenoperatoren neue Sprachen über Σ:

$$K \cup L,\ K \cap L,\ K \setminus L$$

Die Verkettung von Wörtern kann ausgedehnt werden auf die Verkettung von Sprachen:

$$K \circ L := \{v \circ w \in \Sigma^* | v \in K, w \in L\}$$

Beispiel: Sei $K = \{abb, a\}$ und $L = \{bbb, ab\}$

$K \circ L = \{abbbbb, abbab, abbb, aab\}$ und
$L \circ K = \{bbbabb, bbba, ababb, aba\}$
$K \circ \emptyset = \emptyset$
$K \circ \{\varepsilon\} = K$
$K^2 = K \circ K = \{abbabb, abba, aabb, aa\}$

Potenzen von Sprachen, Iteration, Kleene-Stern

Die n-te Potenz einer Sprache L ist die n-fache Verkettung von L mit sich selbst:

$$L^n = \underbrace{L \circ L \circ L \dots \circ L}_{n\text{-mal}}$$

Induktive Definition:

$$L^0 = \{\epsilon\}, \quad L^{n+1} = L^n \circ L$$

Die Iteration (Kleene-Stern) von L ist

$$L^* := \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

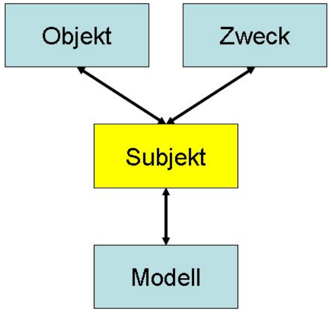
Für jede beliebige Sprache L gilt: $\epsilon \in L^*$
Also gilt: $\emptyset^* = \{\epsilon\}$

Modell

- künstlich geschaffen
- materiell oder immateriell
- vereinfachtes Abbild
- zweckgerichtet
- Abstraktion
- Repräsentation
- Modellierungsannahmen

Modellierung

Ein Subjekt entwirft zu einem Orginal ein Modell zu einem bestimmten Zweck.



Modellierung natürlicher Sprachen

Formale Sprachen

Formale Sprachen sind Mengen von Wörtern (entspricht in natürlichen Sprachen den **Sätzen**), die ihrerseits aus Zeichen/Symbolen (in natürlichen Sprachen **Wörtern**) aufgebaut sind. Was in der Menge ist, ist ein "grammatisch korrektes Wort", alles andere nicht.

Für "strukturierte" formale Sprachen lassen sich endliche Mengen von Regeln/Grammatiken angeben, die diese beschreiben.

Sprachmodell

Formale Sprachen dienen als Modell für natürliche Sprachen.

Wir gehen davon aus, daSS alle natürlichen Sprachen durch endlich viele Regeln beschreibbar sind, da wir sie ansonsten nicht sprechen / verstehen könnten.

Welche Modellannahmen werden hier implizit gemacht?

Sprachbeschreibung durch Aufzählung aller Wörter

- Peter says that Mary has fallen off the tree.
- Oskar says that Peter says that Mary has fallen off the tree.
- Lisa says that Oskar says that Peter says that Mary has fallen off the tree.
- ...
  - Scheitert bei unendlichen Sprachen.
  - Aufzählungen erfassen keine Generalisierungen.

Sprachbeschreibung durch Angabe einer Grammatik

Grammatik

- Eine formale Grammatik ist ein generativer Mechanismus zur Erzeugung von Zeichenketten.
- Grammatiken sind endliche Regelsysteme.
- Die Menge aller Ketten, die von einer Grammatik generiert werden, bilden die von der Grammatik beschriebene formale Sprache.

S	$\rightarrow$	NP VP	VP	$\rightarrow$	V	VP	$\rightarrow$	VP and VP
NP	$\rightarrow$	D N	NP	$\rightarrow$	NP and NP	D	$\rightarrow$	the
N	$\rightarrow$	cat	N	$\rightarrow$	dog	V	$\rightarrow$	sleeps
V	$\rightarrow$	dreams						

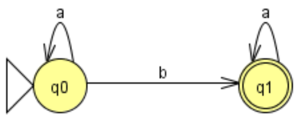
Generiert: the cat sleeps, the dog sleeps, the cat sleeps and dreams,...
aber auch: the cat and the dog sleeps and dreams, ...

Sprachbeschreibung durch Automaten

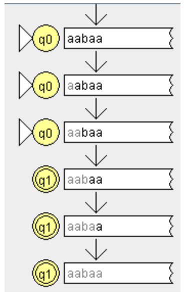
Automaten

Ein Automat ist eine abstrakte Maschine, die bestimmte Zeichenketten akzeptiert.

Die Menge aller Ketten, die von einem Automaten akzeptiert werden, bilden die von dem Automaten beschriebene formale Sprache.



akzeptiert die Sprache $\{a\}^* \circ \{b\} \circ \{a\}^*$



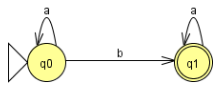
einfachstes Automatenmodell: endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ bestehend aus:

- Q: Alphabet der Zustände
- Σ: Eingabealphabet (Q und Σ müssen disjunkt sein)
- Δ: Übergangsrelation ($\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$)
- q_0: Startzustand ($q_0 \in Q$)
- F: Menge der Endzustände $F \subseteq Q$.

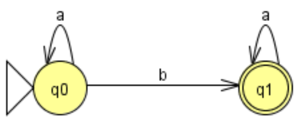
Der Automat heiSSt deterministisch, wenn die Übergangsrelation Δ eine (partielle) Funktion ist ($\Delta : Q \times \Sigma \to Q$).

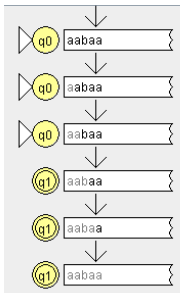


endliche Automaten: Akzeptanz von Wörtern

Ein endlicher Automat akzeptiert ein Wort w, wenn es möglich ist

- beginnend im Startzustand
- das Wort Symbol für Symbol abzuarbeiten, indem man den Zustand gemäSS der Übergangsrelation wechselt
- bis das Wort vollständig abgearbeitet ist,
- und wenn man sich am Ende in einem Endzustand befindet.





Beispiel: endlicher Automat

als 5-Tupel:

$(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ mit

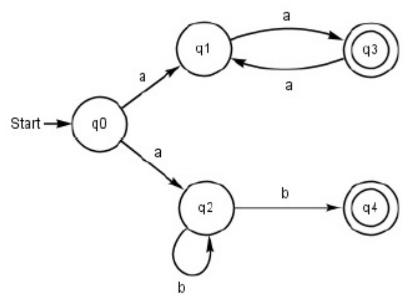
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_0, a, q_2), (q_1, a, q_3), (q_3, a, q_1), (q_2, b, q_2), (q_2, b, q_4)\}$

$F = \{q_3, q_4\}$

als Übergangsnetz:



Dieser Automat ist nicht deterministisch
(am Übergangsnetz ablesbar an identisch beschrifteten Kanten, die von demselben Knoten ausgehen)

Beispiel: endlicher Automat

als 5-Tupel:

$(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ mit

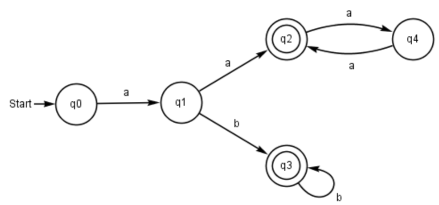
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_2),$
$(q_1, b, q_3), (q_3, b, q_3),$
$(q_2, a, q_4), (q_4, a, q_2)\}$

$F = \{q_2, q_3\}$

als Übergangsnetz:



Dieser Automat ist deterministisch und akzeptiert dieselbe Sprache wie der Automat der vorangegangenen Folie, nämlich
$\{a\} \circ ((\{a\} \circ (\{a\} \circ \{a\})^*) \cup (\{b\} \circ \{b\}^*))$.
Dies ist die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$, die aus einem a gefolgt von einer beliebigen, nichtleeren Kette von b's oder aus einer nichtleeren Kette von a's gerader Länge bestehen.

Endliche Automaten: Terminologie

Zwei Automaten, die dieselbe Sprache akzeptieren, heiSSen äquivalent (Beispiel: die Automaten der letzten beiden Folien sind äquivalent)

Satz: Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

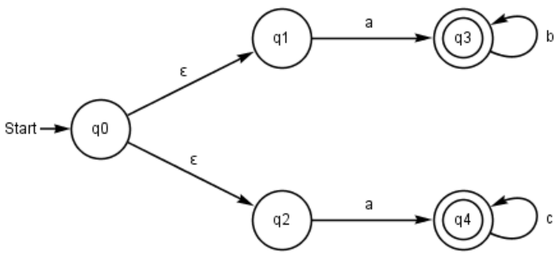
Übergangsrelationen werden häufig als Übergangstabellen dargestellt.
Beispiel: $\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_2), (q_1, b, q_3), (q_3, b, q_3), (q_2, a, q_4), (q_4, a, q_2)\}$

	a	b
q_0	q_1	
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	
q_3		q_3
q_4	q_2	

Ist die Übergangsrelation eines endlichen Automaten eine totale Funktion (steht also in jeder Zelle der Übergangstabelle genau ein Element), so ist der Automat ein endlicher Automat mit vollständiger Übergangsfunktion

Sind endliche Automaten mit vollständiger Übergangsfunktion immer deterministisch?
Das Programm Exorciser bietet sehr gute Übungsmöglichkeiten für die Arbeit mit endlichen Automaten (Website)

endliche Automaten mit ϵ-Übergängen



Zu jedem endlichen Automaten mit ϵ-Übergängen gibt es einen äquivalenten endlichen Automaten ohne ϵ-Übergänge.

Übung

Erstellen Sie endliche Automaten, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ akzeptieren:

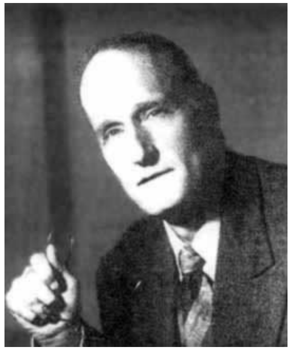
- die Sprache aller Wörter, die nicht länger als 3 sind.
- die Sprache aller Wörter, die mit 'ab' beginnen.
- die Sprache aller Wörter, in denen die Kette 'aa' vorkommt.
- die Sprache aller Wörter, die ungleich der Kette 'abb' sind.
- die Sprache aller Wörter, die auf die Kette 'aa' enden.
- die Sprache aller Wörter, in denen eine gerade Zahl von a's vorkommt.
- die Sprache aller Wörter, in denen mindestens zwei a's vorkommen.

reguläre Sprache

Gegeben ein Alphabet Σ.

- $\emptyset$ ist eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- $\{\epsilon\}$ ist eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $\{a\}$ eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- Wenn A und B reguläre Sprachen sind, dann ist auch $A \cup B$ eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- Wenn A und B reguläre Sprachen sind, dann ist auch $A \circ B$ eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- Wenn A eine reguläre Sprachen ist, dann ist auch A^* eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.
- Nichts sonst ist eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.

Satz von Kleene



(Stephen C. Kleene, 1909 - 1994)

Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, ist regulär und jede reguläre Sprache wird von einem endlichen Automaten akzeptiert.

Endliche Automaten akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem (Kleene)

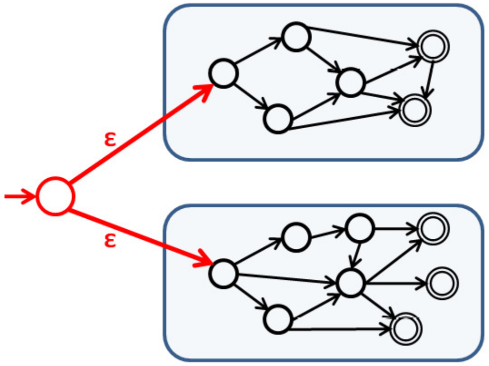
Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten akzeptiert wird ist regulär und jede reguläre Sprache wird von einem endlichen Automaten akzeptiert.

Beweisidee (eine Richtung): Zu jeder regulären Sprache gibt es einen endlichen Automaten, der diese akzeptiert:

$\emptyset$ $\{\varepsilon\}$ $\{a_i\}$

Beweis des Satzes von Kleene (Fortsetzung)

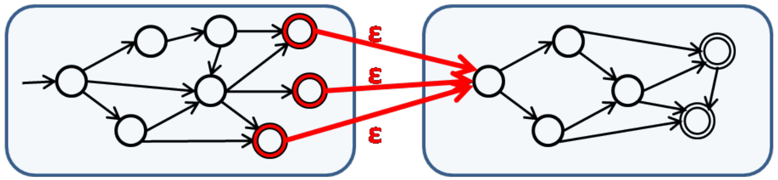
Wenn A und B zwei reguläre Sprachen sind, die von den Automaten A_A und A_B akzeptiert werden, dann wird die reguläre Sprache $A \cup B$ von dem folgenden Automaten akzeptiert:



A ∪ B

Beweis des Satzes von Kleene (Fortsetzung)

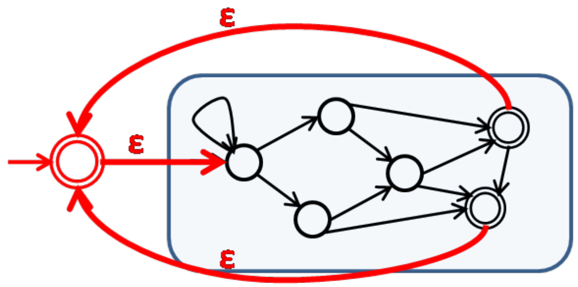
Wenn A und B zwei reguläre Sprachen sind, die von den Automaten A_A und A_B akzeptiert werden, dann wird die reguläre Sprache $A \circ B$ von dem folgenden Automaten akzeptiert:



A ∘ B

Beweis des Satzes von Kleene (Fortsetzung)

Wenn A eine reguläre Sprache ist, die von dem Automaten A_A akzeptiert wird, dann wird die reguläre Sprache A^* von dem folgenden Automaten akzeptiert:



A^*

Formale Grammatik

Definition

Eine formale Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (N, T, S, P)$ aus

- *einem Alphabet von Terminalsymbolen T (häufig auch Σ)*
- *einem Alphabet von Nichtterminalsymbolen N mit $N \cap T = \emptyset$*
- *einem Startsymbol $S \in N$*
- *einer endlichen Menge von Regeln/Produktionen $P \subseteq \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in (N \cup T)^* \text{ und } \alpha \notin T^*\}$.*

Für eine Regel (α, β) schreiben wir auch $\alpha \to \beta$.
Formale Grammatiken werden auch Typ0- oder allgemeine Regelgrammatiken genannt.

S	→	NP VP	VP	→	V	NP	→	D N
D	→	the	N	→	cat	V	→	sleeps

Generiert: the cat sleeps

Terminologie

$G = (\{\text{S,NP,VP,N,V,D,N,EN}\}, \{\text{the, cat, peter, chases}\}, S, P)$

$$P = \left\{ \begin{array}{lllllllll} \text{S} & \to & \text{NP VP} & \text{VP} & \to & \text{V NP} & \text{NP} & \to & \text{D N} \\ \text{NP} & \to & \text{EN} & \text{D} & \to & \text{the} & \text{N} & \to & \text{cat} \\ \text{EN} & \to & \text{peter} & \text{V} & \to & \text{chases} & & & \end{array} \right\}$$

"NP VP" ist in einem Schritt ableitbar aus S

"the cat chases peter" ist ableitbar aus S:

$$\begin{array}{llll} \text{S} & \vdash \text{NP VP} & \vdash \text{NP V NP} & \vdash \text{NP V EN} \\ & \vdash \text{NP V peter} & \vdash \text{NP chases peter} & \vdash \text{D N chases peter} \\ & \vdash \text{D cat chases peter} & \vdash \text{the cat chases peter} & \end{array}$$

Die Menge aller aus dem Startsymbol S ableitbarer Wörter (= Ketten aus Terminalsymbolen) ist die von der Grammatik G erzeugte Sprache $L(G)$.

$$L(G) = \left\{ \begin{array}{cc} \text{the cat chases peter} & \text{peter chases the cat} \\ \text{peter chases peter} & \text{the cat chases the cat} \end{array} \right\}$$

Hinweis: für Terminalsymbole verwendet man in der Regel Klein- und für Nichtterminalsymbole GroSSbuchstaben.

kontextfreie Grammatiken

Eine formale Grammatik, in der jede linke Regelseite aus genau einem Nichtterminalsymbol besteht, heiSSt kontextfrei.

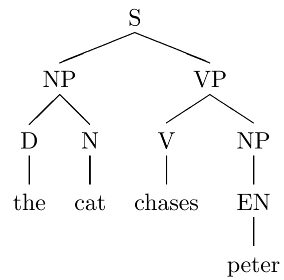
Beispiel:
$G = (\{\text{S,NP,VP,N,V,D,N,EN}\}, \{\text{the, cat, peter, chases}\}, \text{S}, P)$

$$P = \left\{ \begin{array}{rcl rcl rcl} \text{S} & \to & \text{NP VP} & \text{VP} & \to & \text{V NP} & \text{NP} & \to & \text{D N} \\ \text{NP} & \to & \text{EN} & \text{D} & \to & \text{the} & \text{N} & \to & \text{cat} \\ \text{EN} & \to & \text{peter} & \text{V} & \to & \text{chases} & & & \end{array} \right\}$$

Linksableitung (kontextfreie Grammatiken)

Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Eine Ableitung bei der stets das am weitesten links stehende nichtterminale Symbol ersetzt wird, heiSSt Linksableitung

$$\begin{array}{llll} \text{S} & \vdash \text{NP VP} & \vdash \text{D N VP} & \vdash \text{the N VP} \\ & \vdash \text{the cat VP} & \vdash \text{the cat V NP} & \vdash \text{the cat chases NP} \\ & \vdash \text{the cat chases EN} & \vdash \text{the cat chases peter} & \end{array}$$



Zu jeder Linksableitung gibt es genau einen Ableitungsbaum und zu jedem Ableitungsbaum gibt es genau eine Linksableitung.

Chomskyhierarchie

Wenn man die Form der Regeln einschränkt, erhält man Teilmengen der Menge aller durch eine Grammatik erzeugten Sprachen.
Die Chomskyhierarchie ist eine Hierarchie über die Regelbedingungen (den verschiedenen Sprachklassen entsprechen Einschränkungen über die rechten und linken Regelseiten).
Die Chomskyhierarchie reflektiert eine spezielle Form der Komplexität, andere Kriterien sind denkbar und führen zu anderen Hierarchien.
Die Sprachklassen der Chomskyhierarchie sind in der Informatik intensiv untersucht worden (Berechnungskomplexität, effektive Parser).
Für Linguisten ist die Chomskyhierarchie besonders interessant, da sie die Form der Regeln zentral stellt, und somit Aussagen über Grammatikformalismen zulässt.

Noam Chomsky

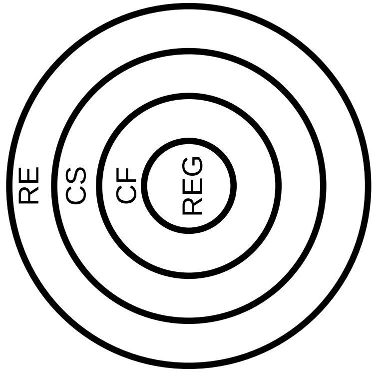
Noam Chomsky
($*$ 7.12.1928, Philadelphia)
Noam Chomsky, *Three Models for the Description of Language*, IRE Transactions on Information Theory (1956).

Chomsky-Hierarchie & Automaten (grober Überblick)

Sprache	*Automat*	*Grammatik*	*Erkennung*	*Abhängigkeit*
rekursiv aufzählbar	Turing Maschine	unbeschränkt Baa → ε	unentscheidbar	beliebig
kontext-sensitiv	linear gebunden	kontext-sensitiv γAδ → γβδ	NP-vollständig	überkreuzt
kontext-frei	Kellerautomat (Stapel)	kontextfrei C → bABa	polynomiell	eingebettet
regulär	endlicher Automat	regulär A → bA	linear	strikt lokal

Chomskyhierarchie: Hauptsatz

REG ⊂ CF ⊂ CS ⊂ RE



REG: reguläre Sprachen, CF: kontextfreie Sprachen, CS: kontextsensitive Sprachen, RE: rekursiv-aufzählbare Sprachen

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Ordnungsrelationen

Dozentin: Wiebke Petersen

4. Foliensatz

starke / schwache Ordnungen

Eine Ordnung R einer Menge A ist eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$.
Man unterscheidet zwischen starken und schwachen Ordnungen:

Eine binäre Relation ist eine schwache Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- reflexiv und
- anti-symmetrisch

ist.

Eine binäre Relation ist eine starke Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- irreflexiv und
- asymmetrisch

ist.

Starke Ordnungen werden auch strikte Ordnungen genannt.

korrespondierende Ordnungen

Eine schwache Ordnung $R \subseteq A \times A$ und eine starke Ordnung S korrespondieren zueinander gdw.

$$R = S \cup id_A$$

Beispiele: Sei $A = \{a, b, c, d\}$

- $R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,c\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,a\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$
- $R_3 = \{\langle d,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$

korrespondierende starke Ordnungen:

- $S_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,c\rangle\}$
- $S_2 = \{\langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$
- $S_3 = \{\langle d,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle b,a\rangle\}$

geordnete Mengen

Eine geordnete Menge ist ein Paar (M, R), bestehend aus einer Menge M und einer Ordnung R von M.

Beispiele:

- $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ ist eine schwach geordnete Menge.
  $(\mathcal{POT}(M), \subset)$ ist die korrespondierende stark geordnete Menge.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine schwach geordnete Menge.
  $(\mathbb{N}, <)$ ist die korrespondierende stark geordnete Menge.

Terminologie

Sei (M, R) eine (stark oder schwach) geordnete Menge.

- a ist ein Vorgänger von b gdw. $R(a, b)$.
- a ist ein Nachfolger von b gdw. $R(b, a)$.
- a ist ein unmittelbarer Vorgänger (oder unterer Nachbar) von b gdw.
  - $a \neq b$,
  - $R(a, b)$, und
  - es gibt kein $c \in M$ mit $c \notin \{a, b\}$ so dass $R(a, c)$ und $R(c, b)$.
- a ist ein unmittelbarer Nachfolger (oder oberer Nachbar) von b gdw. b ein unmittelbarer Vorgänger von a ist.

Wenn a ein unmittelbarer Vorgänger von b ist, dann schreibt man häufig $a \prec b$.

Hassediagramm

Konstruktion

Eine endliche geordnete Mengen (M, R) kann durch ein Hassediagramm veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jedes Element von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daSS a unterhalb von b liegt, wenn $a \neq b$ und $(a, b) \in R$.

Zwei Punkte a und b werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

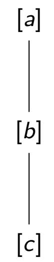
Übung: Zeichnen sie die folgenden Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit $R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$

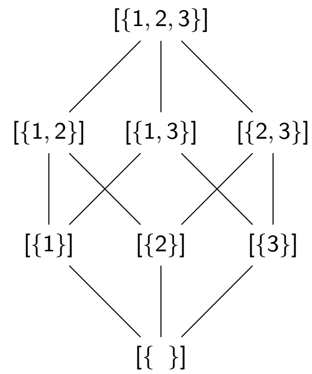
Hasse-Diagramm von $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Beispiele

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit $R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$



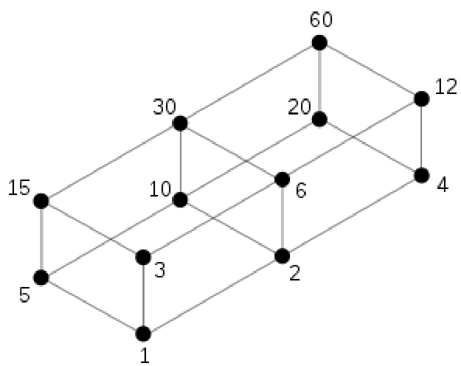
Hasse-Diagramm von $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$



Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$, und $R = \{\langle x, y\rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$.

Hassediagramm der geordneten Menge (M, R):



Übung

Zeichnen sie ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge $M = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$.

totale/partielle Ordnung

Eine binäre Ordnungsrelation ist eine totale Ordnung, gdw. sie konnex ist.

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist konnex (bzw. linear) gdw. für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: $\langle x, y \rangle \in R$ oder $\langle y, x \rangle \in R$.

Das Hassediagramm einer total geordneten, endlichen Menge bildet eine Linie. Kein Element hat mehr als einen oberen oder unteren Nachbarn.

Totale Ordnungen werden auch lineare Ordnungen genannt.

In Abgrenzung zu totalen Ordnungen werden allgemeine Ordnungen auch partielle Ordnungen (oder Halbordnungen) genannt. Im Englischen spricht man von 'poset' (partially ordered set).

minimale und maximale Elemente

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung (stark oder schwach).

Ein Element $x \in A$ ist minimal gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Vorgänger von x ist.

Ein Element $x \in A$ ist maximal gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Nachfolger von x ist.

$x \in A$ ist das Minimum von A, wenn x Vorgänger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt xRy).

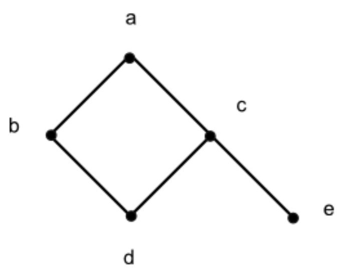
$x \in A$ ist das Maximum von A, wenn x Nachfolger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt yRx).

Hinweise:

eine total geordnete Menge kann höchstens ein minimales und höchstens ein maximales Element haben.

eine partiell geordnete Menge kann beliebig viele minimale und maximale Elemente aber höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum haben.

Beispiel



a ist das einzige maximale Element und somit das Maximum der geordneten Menge.

d und e sind die minimalen Elemente der geordneten Menge.

die geordnete Menge hat kein Minimum,

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M. a und b heiSSen vergleichbar, falls aRb oder bRa; sonst unvergleichbar. Eine Teilmenge K von M heiSSt Kette, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ gilt, daSS sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heiSSt Antikette, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daSS sie unvergleichbar sind.

Satz von Dilworth

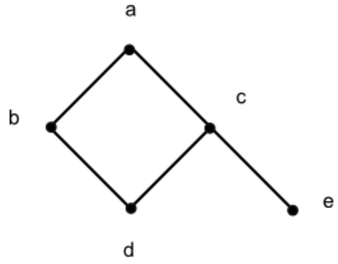
Für eine geordnete endliche Menge (M, R) gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von (M, R) ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von (M, R), die man für eine Partition von M benötigt.

Höhe / Breite

Die Höhe einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Kette von (M, R).

Die Breite einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Antikette von (M, R).

Beispiel



Die Elemente a und b sind vergleichbar.

d und e sind unvergleichbar.

$\{a, b, d\}$ ist eine Kette der geordneten Menge.

$\{b, c\}$ ist Antikette der geordneten Menge.

Die geordnete Menge hat die Höhe 3 und die Breite 2.

Die Ketten $\{a, b, d\}$ und $\{c, e\}$ bilden eine minimale Partition in Ketten der geordneten Menge.

Intervall / Ideal / Filter

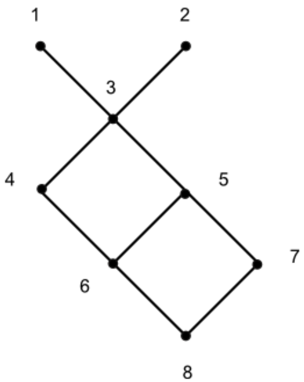
Sei $(M, \trianglelefteq)$ eine geordnete Menge:

Intervall: $[a, b] := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x \trianglelefteq b\}$

Hauptideal: $(b] := \{x \in M \mid x \trianglelefteq b\}$

Hauptfilter: $[a) := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x\}$

Beispiel



$[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)

$(4] = \{4, 6, 8\}$ (Hauptideal von 4)

$[6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Hauptfilter von 6).

Quasiordnung

Der Begriff der Quasiordnung ist schwächer als der der Ordnung:

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Quasiordnung (oder Präordnung), wenn R

- reflexiv und
- transitiv ist.

Beispiel:

- Die Ordnung $\leq_{abs}$, die die ganzen Zahlen nach ihrem Betrag ordnet ist eine Quasiordnung aber keine Ordnung (beachte, dass $-3 \leq_{abs} 3$ und $3 \leq_{abs} -3$ aber $-3 \neq 3$).

Zusammenfassung: Ordnungen

schwache Ordnungen

	transitiv	reflexiv	anti-symmetrisch	linear/total
Quasiordnung	$\star$	$\star$		
partielle Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	
totale Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Bemerkung: (Schwache) lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische GröSSenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

Zusammenfassung: Ordnungen

strikte Ordnungen

	transitiv	irreflexiv	asymmetrisch	linear/total
strikte partielle Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	
strikte totale Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

Man könnte strikte Ordnungen äquivalent auch als transitive, irreflexive und antisymmetrische Relationen definieren, da eine Relation, die irreflexiv und antisymmetrisch ist, immer asymmetrisch ist.

Ordnungserhaltende Abbildungen

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heiSSt ordnungserhaltend, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } x \trianglelefteq y, \text{ dann } f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Eine ordnungserhaltende Abbildung ist ein Ordnungshomomorphismus.

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^2$ ist keine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{Z}, \leq)$ nach $(\mathbb{Z}, \leq)$.
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{POT}(M) \to \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Terminologie und Anmerkungen

- Ordnungserhaltende Abbildungen nennt man auch isotone Abbildungen.
- Abbildungen für die aus $x \trianglelefteq y$ folgt, dass $f(y) \trianglelefteq' f(x)$ gilt, heiSSen antiton.
- Eine Abbildung ist monoton, wenn sie isoton oder antiton ist.
- **Vorsicht:** Häufig wird der Begriff ‘monoton’ auch nur für isotone Abbildungen verwendet.

Ordnungsreflektierende Abbildungen

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heiSSt ordnungsreflektierend, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } f(x) \trianglelefteq f(y), \text{ dann } x \trianglelefteq' y$$

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungsreflektierende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{POT}(M) \to \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist keine ordnungsreflektierende Abbildung von $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Satz: Ordnungsreflektierende Abbildungen sind immer injektiv.

Ordnungseinbettung

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heiSSt Ordnungseinbettung, wenn sie ordnungserhaltend und ordnungsreflektierend ist, wenn also folgendes gilt:

$$x \trianglelefteq y \Leftrightarrow f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Ein Ordnungsisomorphismus ist eine bijektive Ordnungseinbettung. Gibt es einen Ordnungsisomorphismus zwischen $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$, so sagt man dass die beiden geordneten Mengen (ordnungs-)isomorph sind und schreibt $(M, \trianglelefteq) \cong (M', \trianglelefteq')$.

Ein Ordnungsisomorphismus von (M, R) in sich selbst wird auch Ordnungsautomorphismus genannt.

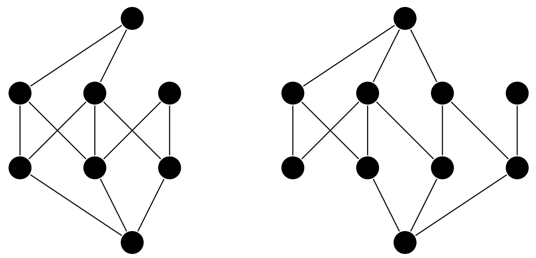
Beispiele:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -x$ ist ein Ordnungsisomorphismus von $(\mathbb{Z}, \leq)$ nach $(\mathbb{Z}, \geq)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{2}$ ist ein Ordnungsautomorphismus auf $(\mathbb{R}, \leq)$.

obere / untere Schranke

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und K eine Teilmenge von M. Ein Element x von M ist

- eine obere Schranke von K, g.d.w. für alle $y \in K : y \leq x$;
- eine untere Schranke von K, g.d.w. für alle $y \in K : x \leq y$.



Die Abbildungen zeigen die Hassediagramme zweier geordneter Mengen. Die rot markierten Elementen haben die blau markierten Elemente als obere und die grün markierten als untere Schranken.

kleinste obere / gröSSte untere Schranke

x heiSSt kleinste obere Schranke oder Supremum von K in M, wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese $\vee$ als 'join').

x heiSSt gröSSte untere Schranke oder Infimum von K in M, wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese $\wedge$ als 'meet').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daSS es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

Das Infimum ist also das Maximum aller unteren Schranken und das Supremum ist das Minimum aller oberen Schranken.

Beispiele

Für die linear geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: $\sup[1,4] = 4$ und $\inf[1,4] = 1$.

Für die partiell geordnete Menge $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ mit $M = \{1,2,3,4\}$ ist das Supremum von $K = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\}$ die Vereinigung aller Elemente von K, also $\sup K = \{1,2,4\}$.
Das Infimum von K ist der Durchschnitt aller Elemente von K, also $\inf K = \emptyset$.

Verbände

Verband: ordnungstheoretische Definition

Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ ist ein Verband, g.d.w. zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y und das Infimum von x und y Elemente von V sind.

vollständiger Verband

Ein Verband $(V, \leq)$ ist ein vollständiger Verband, falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daSS $\sup K \in V$ und $\inf K \in V$.

Jeder vollständige Verband hat ein gröSStes Element $\sup V$, das Einselement (1_V) genannt, und ein kleinstes Element $\inf V$, das Nullement (0_V) genannt.

Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die Atome und die unteren Nachbarn des Einselements die Koatome des Verbands.

Bemerkungen

Jeder endliche Verband ist vollständig.

Da $\inf \emptyset = 1_V$ und $\sup \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge V.

Beispiele

$(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband, $\vee$ entspricht $\cup$ und $\wedge$ entspricht $\cap$.

$([2,5], \leq)$ ist ein vollständiger Verband.

$(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein Verband, aber nicht vollständig.

$\Big(\{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\}, \subseteq\Big)$ ist kein Verband.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Algebren

Dozentin: Wiebke Petersen

5. Foliensatz

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Operationen (Verknüpfungen) f_i.

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation $\otimes$ abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.

Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

An was erinnern Sie die beiden Axiome?

Alternative Definition: Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Funktionen $f_i : A^n \to A$.

Eigenschaften von Operationen

Assoziativgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist assoziativ, g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

Kommutativgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist kommutativ, g.d.w. für alle $a, b \in A$ gilt:

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Idempotenzgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist idempotent, g.d.w. für alle $a \in A$ gilt:

$$a \otimes a = a$$

Distributivgesetz

Für zwei Operationen $\oplus$ und $\otimes$ auf A distributiert $\oplus$ über $\otimes$, g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

neutrale und inverse Elemente

neutrales Element

Gegeben eine Operation $\oplus$ auf A. Ein Element $e \in A$ ist das neutrale Element von $\oplus$, g.d.w. für alle a in A gilt:

$$e \oplus a = a \oplus e = a.$$

inverses Element

Gegeben eine Operation $\oplus$ auf A mit neutralem Element e. Ein Element $a^{-1} \in A$ ist das inverse Element eines Elements $a \in A$, g.d.w.:

$$a^{-1} \oplus a = a \oplus a^{-1} = e$$

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks $((\triangle_D, \circ))$

Grundmenge: $\triangle_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$
(id: 0ř-Drehung; $\curvearrowright$: 120ř-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120ř-Drehung nach links)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen.

$\circ$	**id**	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
id	id	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	id
$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	id	$\curvearrowright$

neutrales Element: id

inverse Elemente: $\text{id}^{-1} = \text{id}$; $\curvearrowright^{-1} = \curvearrowleft$; $\curvearrowleft^{-1} = \curvearrowright$

Eigenschaften von $\circ$: assoziativ, kommutativ

Bsp: Drehungen und vertikale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrows\}$
(id: 0ř-Drehung; $\curvearrowright$: 120ř-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120ř-Drehung nach links, $\leftrightarrows$: vertikale Spiegelung)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Diese Struktur bildet keine Algebra, da u.a. $\leftrightarrows \circ \curvearrowleft$ kein Element der Grundmenge ist (Verletzung der Abgeschlossenheit).

Wenn man alle drei Spiegelungen entlang aller drei Spiegelachsen hinzunimmt, erhält man wieder eine Algebra.

Beispiel: Restklassen modulo 3 $((\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3))$

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$
Operation: $\oplus_3$: Summe modulo 3

$\oplus_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

neutrales Element: [0]

inverse Elemente: $[0]^{-1} = [0]$; $[1]^{-1} = [2]$; $[2]^{-1} = [1]$

Eigenschaften von $\oplus_3$: assoziativ, kommutativ

weitere Beispiele für Algebren

$(\mathbb{N}_0, +)$
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$
$(\mathcal{POT}(M), \cap, \cup)$
$(\Sigma^*, \circ)$

Morphismen

Morphismus

Ein Morphismus ($\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$) von einer Algebra $\mathbf{A}$ in eine Algebra $\mathbf{B}$ ist eine Abbildung, die zum einen eine Funktion von der Menge der ersten in die Menge der zweiten Algebra definiert ($F : A \to B$), und zum anderen die Operationen der ersten Algebra auf die zweite Algebra projiziert (hierzu müssen beide Algebren gleichviele Operationen gleicher Stelligkeit haben).

Homomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ist ein Homomorphismus, g.d.w. für alle x, y in A gilt:

$$\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \oplus y) \text{ und}$$
$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x \otimes y)$$

Isomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ist ein Isomorphismus, g.d.w. $\varphi : A \to B$ bijektiv ist und wenn für alle x, y in A gilt:

$$\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \oplus y) \text{ und}$$
$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x \otimes y)$$

(Isomorphismen sind also bijektive Homomorphismen)

Zwei Algebren sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Automorphismus

Ein Automorphismus einer Algebra $\mathbf{A}$ ist ein Isomorphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Beispiele

$\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(n) = n \mod 3$ ist ein Homomorphismus, aber kein Isomorphismus

$\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\{a\}^*, \circ)$ mit $\varphi(n) = a^n$ ist ein Isomorphismus.

$\varphi : (\triangle_D, \circ) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(\mathrm{id}) = [0]$, $\varphi(\curvearrowright) = [1]$, $\varphi(\curvearrowleft) = [2]$ ist ein Isomorphismus.

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine Semigruppe (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation $\otimes$, die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

Monoid

Ein Monoid $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

Gruppe

Eine Gruppe $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

G3 jedes Element aus G hat ein inverses Element in G.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist eine Semigruppe

$(\mathbb{N}_0, +)$ ist ein Monoid

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

$(\mathcal{POT}(M), \cup)$ ist ein Monoid

$(\Sigma^*, \circ)$ ist ein Monoid

$(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ ist eine Gruppe

$(\triangle_D, \circ)$ ist eine Gruppe

Verbände

Verband: algebraische Definition

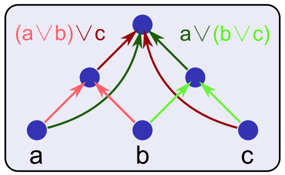
Ein Verband $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen $\vee$ und $\wedge$, die folgende Bedingungen erfüllen:

Kommutativgesetze: $a \vee b = b \vee a$ und $a \wedge b = b \wedge a$

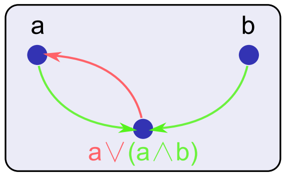
Assoziativgesetze: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ und $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Idempotenzgesetze: $a \vee a = a$ und $a \wedge a = a$

Absorptionsgesetze: $a \vee (a \wedge b) = a$ und $a \wedge (a \vee b) = a$



$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$



$a \vee (a \wedge b) = a$

Verbände

Zusammenhang algebraischer und ordnungstheoretischer Verband

(i) $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ sei ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband. Setze $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ und $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein (algebraisch definierter) Verband.

(ii) $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ sei ein (algebraisch definierter) Verband. Setze $a \trianglelefteq b$ g.d.w. $a \wedge b = a$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband.

Beispiel: $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ und $(\mathcal{POT}(M), \cup, \cap)$

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Bäume

Dozentin: Wiebke Petersen

6. Foliensatz
(basierend auf Folien von Gerhard Jäger)

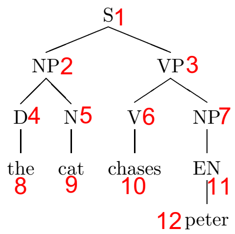
Wiebke Petersen math. Grundlagen 130

Bäume

Baumdiagramme

Ein Baumdiagramm eines Satzes stellt drei Arten von Information dar:

- die Konstituentenstruktur des Satzes,
- die grammatische Kategorie jeder Konstituente, sowie
- die lineare Anordnung der Konstituenten.



Bäume

Konventionen

- Ein Baum besteht aus Knoten, die durch
- Kanten verbunden werden.
- Kanten sind implizit von oben nach unten gerichtet (ähnlich zu Hasse-Diagrammen, wo die implizite Richtung aber von unten nach oben ist.)
- Jeder Knoten ist mit einem Etikett (engl. label) versehen.

Bäume

Dominanz

Ein Knoten x dominiert Knoten y genau dann, wenn es eine zusammenhängende (möglicherweise leere) Sequenz von abwärts gerichteten Ästen gibt, die mit x beginnt und mit y endet.

Für einen Baum T bildet

$$D_T = \{\langle x, y\rangle | x \text{ dominiert } y \text{ in } T\}$$

die zugehörige Dominanz-Relation.

D_T ist eine schwache Ordnung, also reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

Bäume

Konventionen

Wenn x bzgl. D_T der unmittelbare Vorgänger von y ist, dann dominiert x y unmittelbar.

Der unmittelbare Vorgänger von x bzgl. D_T heiSSt der Mutterknoten von x.

Die unmittelbaren Nachfolger von x heiSSen Tochterknoten von x.

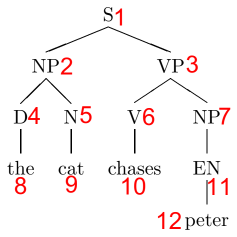
Wenn zwei Knoten nicht identisch sind, aber den selben Mutterknoten haben, heiSSen sie Schwesterknoten.

Jeder Baum hat endlich viele Knoten.

Jeder Baum hat ein Infimum bezüglich der Ordnung D_T. Das Infimum heiSSt Wurzel oder Wurzelknoten des Baums und dominiert alle anderen Knoten. Vorsicht: Die Baumdiagramme sind auf den Kopf gestellte Hasse-Diagramme (die Wurzel ist der oberste Knoten des Baumdiagramms, also der Knoten, der als einziges keinen Mutterknoten hat)

Die maximalen Elemente eines Baumes heiSSen Blätter. Blätter stehen in einem Baumdiagramm ganz unten. Blätter sind diejenigen Knoten, die keine Töchter haben.

Beispiel



Knoten 2 dominiert Knoten 8 ($\langle 2, 8\rangle \in D_T$)

Knoten 2 dominiert Knoten 5 unmittelbar

Knoten 2 dominiert Knoten 2

Knoten 2 ist der Mutterknoten von Knoten 5

Knoten 4 und Knoten 5 sind Schwesterknoten

Knoten 1 ist der Wurzelknoten des Baums

Knoten 10 ist ein Blatt des Baums

Bäume

Präzedenz

Baum-Diagramme beinhalten (anders als Hasse-Diagramm) Informationen über die lineare Abfolge der Knoten.

Knoten x geht Knoten y voran (engl. x *precedes* y) genau dann, wenn x links von y steht und keiner der beiden Knoten den anderen dominiert.

Für einen Baum T bildet

$$P_T = \{\langle x, y\rangle | x \text{ geht } y \text{ voran}\}$$

die zugehörige Präzedenz-Relation.

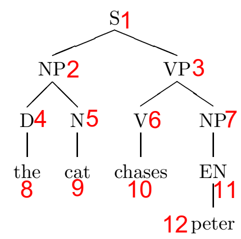
P_T ist eine starke Ordnung, also irreflexiv, transitiv und asymmetrisch.

Bäume

Exklusivität

In einem Baum T stehen die Knoten x und y in der Präzedenz-Relation (also $P_t(x, y)$ oder $P_t(y, x)$) genau dann, wenn sie nicht in der Dominanz-Relation stehen (also weder $D_T(x, y)$ noch $D_T(y, x)$).

Beispiel



Knoten 7 und Knoten 1 stehen in der Dominanz-Relation

Knoten 7 und Knoten 2 stehen in der Präzedenz-Relation

Knoten 7 und Knoten 9 stehen in der Präzedenz-Relation

Knoten 7 und Knoten 12 stehen in der Dominanz-Relation

Knoten 7 und Knoten 10 stehen in der Präzedenz-Relation

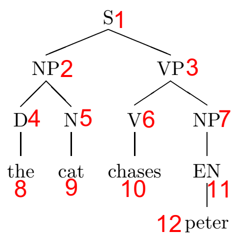
Bäume

Nicht-Überkreuzung

Wenn in einem Baum der Knoten x dem Knoten y vorangeht, dann geht jeder Knoten x', der von x dominiert wird, jedem Knoten y' voran, der von y dominiert wird.

Diese Bedingung schlieSSt folgende Situationen aus:

- Ein Knoten hat mehrere Mutterknoten.
- Äste überkreuzen sich.

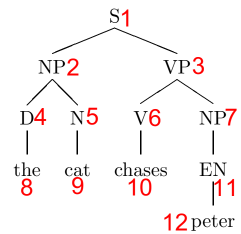


Bäume

Etikettierung

Eine Etikettierungsfunktion L_T eines Baums T ist eine Funktion, die jedem Knoten ein Etikett zuweist.

- L_T muss nicht injektiv sein (mehrere Knoten können das selbe Etikett tragen).
- Bei Ableitungsbäumen werden Blätter (auch Terminal-Knoten genannt) auf Terminalsymbole abgebildet und alle anderen Knoten auf Nichtterminal-Symbole.



Bäume

Mit Hilfe dieser Eigenschaften von Bäumen können *Theoreme* bewiesen werden, also Sachverhalte, die für alle Bäume gelten. Zum Beispiel

Theorem

Wenn x und y Schwesterknoten sind, dann gilt entweder $P_T(x, y)$ oder $P_T(y, x)$.

Beweisskizze: Schwesterknoten haben dieselbe Mutter und stehen untereinander nicht in der Dominanzrelation. Aus dem Exklusivitätssatz folgt, dass sie in der Präzedenzrelation stehen.

Theorem

Die Menge der Blätter eines Baumes sind durch P_T total geordnet.

Beweisskizze: Folgt aus dem Satz der Nicht-Überkreuzung.

Grammatiken und Bäume

Zur Erinnerung: kontextfreie Grammatiken sind Grammatiken mit Regeln, deren linke Regelseiten aus genau einem Nichtterminalsymbol bestehen:

$$A \to \alpha$$

mit $A \in N$ und $\alpha \in (T \cup N)^*$

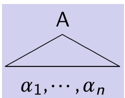
Ableitungen kontextfreier Grammatiken können als etikettierte Bäume abgebildet werden.

Bäume repräsentieren dabei die relevanten Aspekte einer Ableitung (also welche Regeln für die Generierung welcher Konstituenten angewandt wurden, aber nicht, in welcher Reihenfolge Regeln angewandt wurden).

Grammatiken und Bäume

Definition

Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$, bei der alle Regeln als linke Seite genau ein Nichtterminalsymbol haben, generiert einen Baum B genau dann, wenn

- die Wurzel von B mit S etikettiert ist,
- die Blätter entweder mit Terminalsymbolen oder mit ϵ etikettiert sind, sowie
- es für jeden Teilbaum 

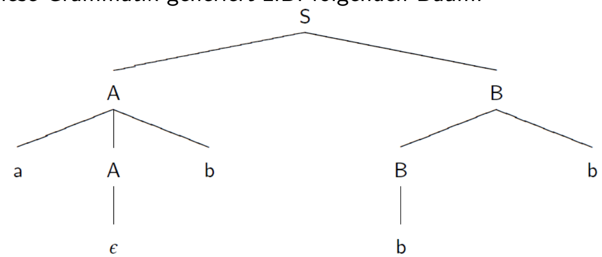
in B eine Regel $A \to \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ in P gibt.

Grammatiken und Bäume

Beispielgrammatik

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P) \quad P = \left\{ \begin{array}{ll} S \to AB & B \to Bb \\ A \to aAb & B \to b \\ A \to \epsilon & \end{array} \right\}$$

Diese Grammatik generiert z.B. folgenden Baum:



Frage: Welche Sprache wird durch diese Grammatik generiert?

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Kombinatorik

Dozentin: Wiebke Petersen

7. Foliensatz

Kombinatorik

- Thema der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen.
- Typische kombinatorische Aufgaben sind Urnenaufgaben: Wieviele Möglichkeiten gibt es k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen?
- Hierbei unterscheidet man
  - ob die gezogenen Kugeln wieder zurückgelegt werden oder nicht, und
  - ob die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, beachtet wird oder nicht.

kombinatorische Grundaufgaben: Beispiele

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	3er-Wette (Rennsport)	Toto
ohne Beachtung der Reihenfolge	Lotto / Skat	Eisbecher

Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der Ergebnisse von 11 FuSSballspielen (1: Sieg Heimmannschaft, 2: Sieg Gastmannschaft, 0: unentschieden).

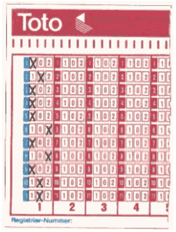
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{11} = 177147$$

Es gibt

$$n^k$$

Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

Beispiel: Toto (11er-Wette)



Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

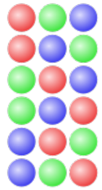
Spezialfall: alle Kugeln werden gezogen ($n = k$)

Permutationen

n Objekte lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.
Der Ausdruck $n!$ wird ‚n Fakultät'gelesen.
Als Permutation bezeichnet man eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst.
Zu einer n-elementigen Menge gibt es $n!$ Permutationen.
Permutationen sind ein Spezialfall ($k = n$) des ‚Ziehens ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge'

Lineare Anordnungsmöglichkeiten für 3 verschiedenfarbige Kugeln:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$



Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der ersten 3 Plätze bei einem Pferderennen, wenn 10 Pferde starten.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

Beispiel: 3er-Wette Pferderennsport

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Lottospiel (6 aus 49)

$$\frac{49!}{(49-6)!} : 6! = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \binom{49}{6} = 13983816$$

Beispiel: Skathände (10 aus 32)

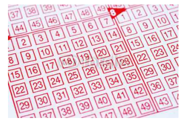
$$\frac{32!}{(32-10)!} : 10! = \frac{32!}{(32-10)! \cdot 10!} = \binom{32}{10} = 64512240$$

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

Beispiel: Lotto



Beispiel: Skat

Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$
Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede k-Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf $k!$ Arten anordnen.

Folglich gibt es
$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
verschiedene ungeordnete k-Auswahlen aus einer $n$er-Menge ohne Wiederholungen.

Die Zahlen $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ sind die Binomialkoeffizienten und werden oft mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet (in Worten ‚n über k‘).

Es gibt
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Eisbecher

Beispiel: Eisbecher mit 3 Kugeln aus 10 Eissorten zusammenstellen.
$$\binom{10+3-1}{3} = 220$$

Es gibt
$$\binom{n+k-1}{k}$$
Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

Schoko	NuSS	Orange	Erdbeer	Banane	Becher	Kodierung
	••			•	•••	$\vert\bullet\bullet\vert\vert\vert\bullet$
		•	•	•	•••	$\vert\vert\bullet\vert\bullet\vert\bullet$
•			••		•••	$\bullet\vert\vert\vert\bullet\bullet\vert$
			•••		•••	$\vert\vert\vert\bullet\bullet\bullet\vert$

Die Kodierung der Eisbecher ist so gewählt, dass sich das Problem der Wahl von k Eiskugeln aus n Eissorten auf das Problem der linearen Anordnung von k ununterscheidbaren Kugeln und $n-1$ ununterscheidbaren Strichen reduziert. Dieses Problem lässt sich als Auswahl von k Positionen (die Kugelpositionen) aus $k+n-1$ Positionen auffassen.

Hierfür gibt es $\binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten

.

kombinatorische Grundaufgaben:Zusammenfassung

Anzahl der k-Auswahlen aus einer $n$er-Menge:

	ohne Wiederholungen	mit Wiederholungen
mit Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Hinweise:

Bearbeiten Sie bitte das Modul Kombinatorik (Link)

Berechnung von Binomialkoeffizienten (Link)

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Wahrscheinlichkeit

Dozentin: Wiebke Petersen

8. Foliensatz

Motivation

- In vielen Bereichen der CL kommt Wahrscheinlichkeitstheorie zur Anwendung, da es oft unmöglich ist, mit rein symbolischen Ansätzen ein vollständiges Bild aller möglichen Strukturen einschlieSSlich Präferenzen bei Ambiguitäten zu gewinnen.
- Wir haben es meist mit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von sogenannten Ergebnissen zu tun, deren Wahrscheinlichkeit irgendwie abgeschätzt werden muss.

Bsp.:

- Wahrscheinlichkeit dafür, dass VP $\rightarrow$ VP PP verwendet wird, vorausgesetzt, man möchte eine VP generieren.
- Wahrscheinlichkeit dafür, dass *chair* eine Nomen ist.

ideales Zufallsexperiment (Modell)

Anforderungen an ein ideales Zufallsexperiment:

- Das Experiment wird unter genau festgelegten Versuchsbedingungen durchgeführt.
- Die Menge der möglichen Ergebnisse ist vor der Durchführung des Experiments bekannt.
- Das Experiment kann zumindest prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.

Ergebnisraum

Die Menge der möglichen Ergebnisse eines idealen Zufallsexperiments bildet den Ergebnisraum und wird mit Ω ('Omega') bezeichnet.
Ω wird auch der Stichprobenraum genannt.
Ist der Ergebnisraum nicht leer und abzählbar, dann heiSSt er diskret.

Zufallsexperiment und Ereignisse

Wir unterscheiden einzelne Ergebnisse und Ereignisse, die Mengen von Ergebnissen sind.

- Ein Ereignis bildet eine Teilmenge von Ω.
- $\emptyset$ ist das unmögliche Ereignis.
- Ω ist das sichere Ereignis.
- Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heiSSen unvereinbar, wenn $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
- Die Einermengen $\{e\}$ $(e \in \Omega)$ heiSSen Elementarereignisse.
- Das Komplement eines Ereignisses E, also $\overline{E}$, heiSSt Gegenereignis zu E.

Beispiel Zufallsexperiment: Würfeln mit einem Würfel

- $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
- Der Wurf einer 3 ist das Elementarereignis $\{$⚂$\}$ des Zufallexperiments.
- $\{$⚁, ⚃, ⚅$\}$ ist das Ereignis ‚Wurf einer geraden Augenzahl'
- Das Gegenereignis von ‚Wurf einer geraden Augenzahl'ist ‚Wurf einer ungeraden Augenzahl'

Beispiel Zufallexperiment: Augensumme bei zweimaligem Würfeln

Summe 2	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚀$\}$
Summe 3	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚁, ⚁⚀$\}$
Summe 4	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚂, ⚂⚀, ⚁⚁$\}$
Summe 5	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚃, ⚃⚀, ⚁⚂, ⚂⚁$\}$
Summe 6	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚄, ⚄⚀, ⚁⚃, ⚃⚁, ⚂⚂$\}$
Summe 7	entspricht dem Ereignis	$\{$⚀⚅, ⚅⚀, ⚁⚄, ⚄⚁, ⚂⚃, ⚃⚂$\}$
Summe 8	entspricht dem Ereignis	$\{$⚁⚅, ⚅⚁, ⚂⚄, ⚄⚂, ⚃⚃$\}$
Summe 9	entspricht dem Ereignis	$\{$⚂⚅, ⚅⚂, ⚃⚄, ⚄⚃$\}$
Summe 10	entspricht dem Ereignis	$\{$⚃⚅, ⚅⚃, ⚄⚄$\}$
Summe 11	entspricht dem Ereignis	$\{$⚄⚅, ⚅⚄$\}$
Summe 12	entspricht dem Ereignis	$\{$⚅⚅$\}$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $\langle \Omega, P \rangle$, bestehend aus

- einer nicht leeren, abzählbaren Menge Ω von Ergebnissen (diskreter Ergebnisraum) und
- einem WahrscheinlichkeitsmaSS $P : \mathcal{POT}(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass
  - $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{POT}(\Omega)$;
  - $P(\Omega) = 1$;
  - für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{POT}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Es ergeben sich folgende Eigenschaften für WahrscheinlichkeitsmaSSe:

- $P(\emptyset) = 0$
- Für Ereignisse A, B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ für alle $A \subseteq \Omega$ (Tertium non datur)
- Impliziert Ereignis A das Ereignis B (d.h. $A \subseteq B$), dann gilt $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- Kein Ereignis kann eine Wahrscheinlichkeit über 1 haben.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bsp.: $\Omega = \{$is-noun, has-plural-s, is-adjective, is-verb$\}$.
Frage: Kann die Funktion f mit

$$\begin{aligned} f(\text{is-noun}) &= 0.45 \\ f(\text{has-plural-s}) &= 0.2 \\ f(\text{is-adjective}) &= 0.25 \\ f(\text{is-verb}) &= 0.3 \end{aligned}$$

zu einem WahrscheinlichkeitsmaSS $f : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ergänzt werden?
Nein, da dann $f(\Omega) = 0.45 + 0.2 + 0.25 + 0.3 = 1.2 > 1$ wäre.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Besser: $\Omega = \{$is-noun-with-plural-s, is-noun-without-plural-s, is-adjective, is-verb$\}$.

$$\begin{aligned} f(\text{is-noun-with-plural-s}) &= 0.09 \\ f(\text{is-noun-without-plural-s}) &= 0.36 \\ f(\text{is-adjective}) &= 0.25 \\ f(\text{is-verb}) &= 0.3 \end{aligned}$$

Laplace-Räume

Laplace-Räume sind diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, in denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.
Bsp.: Würfelexperiment. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jedes Ergebnis hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$.

In Laplace-Räumen gilt also

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

.

Beispiel Laplace-Raum: zweimaliges Würfeln und Augensumme

Augensumme	Ereignis	Wahrscheinlichkeit
2	{⚀⚀}	$\frac{1}{36}$
3	{⚀⚁, ⚁⚀}	$\frac{2}{36}$
4	{⚀⚂, ⚂⚀, ⚁⚁}	$\frac{3}{36}$
5	{⚀⚃, ⚃⚀, ⚁⚂, ⚂⚁}	$\frac{4}{36}$
6	{⚀⚄, ⚄⚀, ⚁⚃, ⚃⚁, ⚂⚂}	$\frac{5}{36}$
7	{⚀⚅, ⚅⚀, ⚁⚄, ⚄⚁, ⚂⚃, ⚃⚂}	$\frac{6}{36}$
8	{⚁⚅, ⚅⚁, ⚂⚄, ⚄⚂, ⚃⚃}	$\frac{5}{36}$
9	{⚂⚅, ⚅⚂, ⚃⚄, ⚄⚃}	$\frac{4}{36}$
10	{⚃⚅, ⚅⚃, ⚄⚄}	$\frac{3}{36}$
11	{⚄⚅, ⚅⚄}	$\frac{2}{36}$
12	{⚅⚅}	$\frac{1}{36}$

Beispiel Laplace-Raum: Geburtstagsproblem

Bsp.: Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von 30 Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.
Vereinfachung: Wir ignorieren Schaltjahre und saisonale Variationen.
D.h., Wahrscheinlichkeit dafür, an einem bestimmten Tag Geburtstag zu haben, ist $\frac{1}{365}$.
Wahrscheinlichkeitsraum:

> $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^{30}$, also alle Folgen von 30 Zahlen aus $\{1, \ldots, 365\}$.
>
> $|\Omega| = 365^{30}$. Alle Folgen sind gleichwahrscheinlich (Laplace-Raum).

Hinweis

Für die Modellierung als Laplace-Raum ist es unerläSSlich, die Geburtstagsverteilung als Urnenproblem mit Beachtung der Reihenfolge zu betrachten.
Würde die Reihenfolge vernachlässigt und Ω als die Menge aller ungeordneten Kombinationen möglicher Geburtstagsverteilungen betrachtet (also $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$), so wären die Ereignisse in dem Ereignisraum nicht gleichwahrscheinlich.
Beispiel:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass alle am 1. Januar Geburtstag haben ist $\left(\frac{1}{365}\right)^{30}$ während die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geburtstage genau auf die ersten 30 Tage des Jahres fallen $\left(\frac{1}{365}\right)^{30} * 30!$ ist.

Beispiel Laplace-Raum: Geburtstagsproblem

Ziel: Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Folge eintritt, in der sich mindestens ein Element wiederholt.
Einfacher: Wahrscheinlichkeitsermittlung über das Komplement.
Wieviel Folgen gibt es, in denen sich kein Element wiederholt?

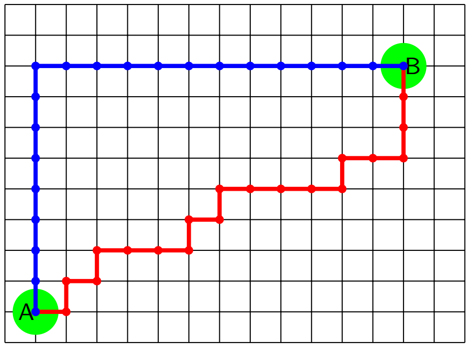
$$365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 29) = \frac{365!}{(365 - 30)!}$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben ist

$$1 - \frac{365!}{365^{30}(365 - 30)!} \approx 1 - 0.29 = 0.71$$

Beispiel Laplace-Raum: Wege im Gitter

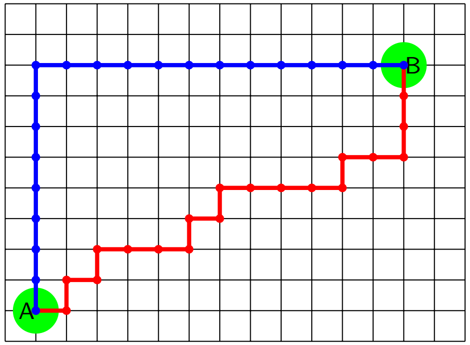
Wege von A nach B. Regel: Schritt nach oben oder Schritt nach rechts.
Beide Richtungen gleichwahrscheinlich.



Wieviele Wege gibt es von A nach B?
Jeder erfolgreiche Weg besteht aus 20 Schritten (8 nach oben, 12 nach rechts).
Zahl der möglichen Wege: $|A \rhd^{20} B| = \binom{20}{8} = 125970$

Beispiel Laplace-Raum: Wege im Gitter

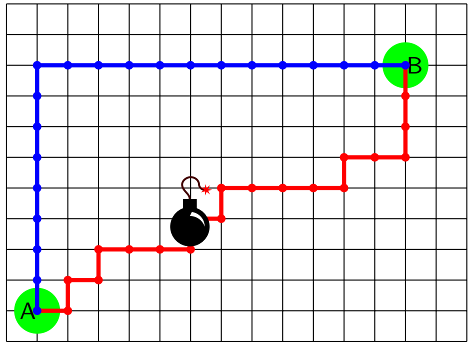
Wege von A nach B. Regel: Schritt nach oben oder Schritt nach rechts.
Beide Richtungen gleichwahrscheinlich.



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis nach 20 Schritten bei Punkt B anzukommen?

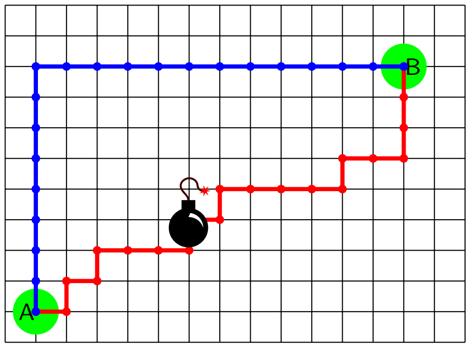
$$P(A \triangleright^{20} B) = \frac{|A \triangleright^{20} B|}{\Omega} = \frac{\binom{20}{8}}{2^{20}} = \frac{125970}{1048576} \approx 0,12$$

Beispiel Laplace-Raum: Gitter mit Bombe



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis auf einem Weg von A nach B nicht auf die Bombe zu stoSSen? Also die Wahrscheinlichkeit unter allen Wegen von A nach B einen zu wählen, der nicht auf die Bombe stöSSt.
Wege von A nach B, die die Bombe treffen: $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{5} = 56 \cdot 792 = 44352$
Wahrscheinlichkeit Weg von A nach B ohne Bombe: $\frac{125970-44352}{125970} \approx 0,65$

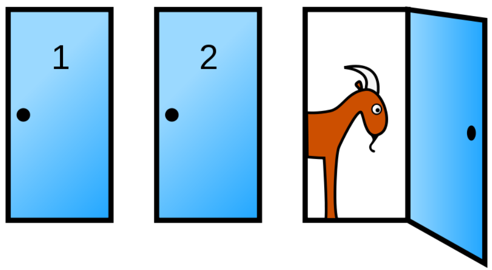
Beispiel Laplace-Raum: Gitter mit Bombe



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis nach 20 Schritten sowohl bei Punkt B anzukommen, als auch auf dem Weg nicht auf die Bombe zu treffen?

$$\frac{\binom{20}{8} - \binom{8}{3} \cdot \binom{12}{5}}{2^{20}} = \frac{125970 - 44352}{1048576} \approx 0,078$$

Ziegenproblem



Situation: 3 verschlossene Türen, hinter einer der Türen befindet sich ein Gewinn, hinter zwei Türen befinden sich Nieten (Ziegen).

- der Kandidat wählt eine Tür
- der Moderator öffnet von den verbleibenden beiden Türen eine Ziegentür
- der Kandidat darf die Tür wechseln

Frage: Lohnt sich ein Wechsel?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bsp.:

- Wahrscheinlichkeit für eine Produktion VP $\rightarrow$ V NP für die Generierung einer VP, gegeben, dass es sich um das Verb *kisses* (bzw. *sleeps*) handelt.
- Wahrscheinlichkeit dafür, dass *chairs* ein Nomen ist, gegeben die Tatsache, dass das vorangehende Wort ein Artikel ist.
- Wahrscheinlichkeit dafür, dass *chairs* ein Nomen ist, gegeben die Tatsache, dass das nachfolgende Wort ein Artikel ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

In einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, P\rangle$, gegeben ein Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$, ist durch

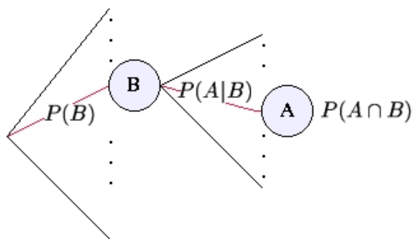
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

das durch B bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\cdot|B) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert.

$\langle\mathcal{P}(\Omega), P(\cdot|B)\rangle$ ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

$P(A|B)$ wird gelesen als 'die Wahrscheinlichkeit von A gegeben B' und steht für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, gegeben die Sicherheit, dass das Ereignis B eingetreten ist.

bedingte Wahrscheinlichkeiten: Produktregel



Produktregel

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Das heißt $P(A|B) = P(A)$.

Bsp. Würfelexperiment.

Die Ereignisse, dass (A) eine gerade Zahl gewürfelt wird und (B) eine Zahl ≤ 2, sind unabhängig:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{1,2\})} = 0.5 = P(A)$$

Die Ereignisse A wie oben und B, dass genau die 2 gewürfelt wird, sind nicht unabhängig:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2\})} = 1 \neq P(A)$$

Die Formel von Bayes

Thomas Bayes (1701-1761)

Die Formel von Bayes

Ziel: $P(A|B)$ berechnen auf der Grundlage von $P(B|A)$, $P(A)$ und $P(B)$.

Laut Definition gilt

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \text{ und } P(B \cap A) = P(B|A) \cdot (P(A)$$

Daraus ergibt sich

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Die Formel von Bayes

Man kann das Theorem von Bayes noch verallgemeinern: Angenommen, es gibt eine endliche oder abzählbar unendliche Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Ereignissen mit $A_i \subseteq \Omega$ und $P(A_i) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, die eine Zerlegung von Ω bilden, dann gilt für jedes Ereignis $B \subseteq \Omega$: $(B \cap A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bildet eine disjunkte Zerlegung von B, und daher

$$P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$$

Spezialfall: Zerlegung in A und $\overline{A}$:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

$$P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}P(A) + \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}P(\overline{A})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

Die Formel von Bayes

Aus

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

und

$$P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$$

ergibt sich dann für die Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und das Ereignis B wie oben die verallgemeinerte Formel von Bayes:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Die Formel von Bayes

Bsp.: Angenommen, wir interessieren uns für eine relativ seltene Konstruktion, z.B. *Parasitic Gaps*, die ungefähr alle 100.000 Sätze einmal vorkommt.[1] Joe Linguist hat einen Pattern-Matching Algorithmus zur Erkennung von Parasitic Gaps implementiert, der, falls ein Satz ein Parasitic Gap enthält, dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 auch erkennt. Enthält ein Satz kein Parasitic Gap, liefert der Algorithmus mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.005 das falsche Ergebnis, dass ein Parasitic Gap in dem Satz vorhanden ist.
Frage: Angenommen, der Test meldet ein Parasitic Gap in einem Satz. Wie wahrscheinlich ist es, dass es sich wirklich um eines handelt?

[1] Z.B. *which book did she review _ without reading _?*.

Die Formel von Bayes

Sei G das Ereignis eines parasitic gaps, T das eines positiven Tests.
Wir kennen die Werte $P(G) = \frac{1}{100.000} = 0,00001$,
$P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 0,99999$, $P(T|G) = 0,95$ und $P(T|\overline{G}) = 0,005$.

Wir wollen $P(G|T)$ berechnen.

$$P(G|T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|G) \cdot P(G)}{P(T)}$$

$P(T)$ lässt sich über $P(T|G)$ und $P(T|\overline{G})$ berechnen:

$$P(T) = P(T \cap G) + P(T \cap \overline{G}) = P(T|G) \cdot P(G) + P(T|\overline{G}) \cdot P(\overline{G})$$

Also erhalten wir

$$P(G|T) = \frac{P(T|G)P(G)}{P(T|G)P(G) + P(T|\overline{G})P(\overline{G})}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.00001}{0.95 \times 0.00001 + 0.005 \times 0.99999}$$

$$\approx 0.002$$

Gefangenenparadoxon

Aus drei zum Tode verurteilten Gefangene (Anton, Bernd und Clemens) wird einer zur Begnadigung ausgewählt. Anton erfährt, dass Bernd hingerichtet wird. Anton erzählt dies Clemens weiter.

> Anton: entweder Clemens wird begnadigt oder er selbst, so dass seine Überlebenschance von $1/3$ auf $1/2$ gestiegen sei.
>
> Clemens: Überlebenschance von $1/3$ auf $2/3$ gestiegen

Wer von beiden Gefangenen schätzt seine Chancen korrekt ein?

Berkeley 1973 (Simpsonsche Paradoxon)

> Annahmequote Universität
> für Männer: $44,3\%$ für Frauen: $34,6\%$
>
> liegt hier eine Benachteiligung der Frauen vor?

Nicht notwendig, siehe: Statistikmodul Mathe-Prisma (Link)

Hinweis

Arbeiten Sie bitte das Mathe-Prisma Modul zur bedingten Wahrscheinlichkeit durch (Link)