Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Ordnungsrelationen

Dozentin: Wiebke Petersen

4. Foliensatz

starke / schwache Ordnungen

Eine Ordnung R einer Menge A ist eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$.
Man unterscheidet zwischen starken und schwachen Ordnungen:

Eine binäre Relation ist eine schwache Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- reflexiv und
- anti-symmetrisch

ist.

Eine binäre Relation ist eine starke Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- irreflexiv und
- asymmetrisch

ist.

Starke Ordnungen werden auch strikte Ordnungen genannt.

korrespondierende Ordnungen

Eine schwache Ordnung $R \subseteq A \times A$ und eine starke Ordnung S korrespondieren zueinander gdw.

$$R = S \cup id_A$$

Beispiele: Sei $A = \{a, b, c, d\}$

- $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$
- $R_3 = \{\langle d, c\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

korrespondierende starke Ordnungen:

- $S_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}$
- $S_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$
- $S_3 = \{\langle d, c\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

geordnete Mengen

Eine geordnete Menge ist ein Paar (M, R), bestehend aus einer Menge M und einer Ordnung R von M.

Beispiele:

- $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ ist eine schwach geordnete Menge.
  $(\mathcal{POT}(M), \subset)$ ist die korrespondierende stark geordnete Menge.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine schwach geordnete Menge.
  $(\mathbb{N}, <)$ ist die korrespondierende stark geordnete Menge.

Terminologie

Sei (M, R) eine (stark oder schwach) geordnete Menge.

- a ist ein Vorgänger von b gdw. $R(a, b)$.
- a ist ein Nachfolger von b gdw. $R(b, a)$.
- a ist ein unmittelbarer Vorgänger (oder unterer Nachbar) von b gdw.
    - $a \neq b$,
    - $R(a, b)$, und
    - es gibt kein $c \in M$ mit $c \notin \{a, b\}$ so dass $R(a, c)$ und $R(c, b)$.
- a ist ein unmittelbarer Nachfolger (oder oberer Nachbar) von b gdw. b ein unmittelbarer Vorgänger von a ist.

Wenn a ein unmittelbarer Vorgänger von b ist, dann schreibt man häufig $a \prec b$.

Hassediagramm

Konstruktion

Eine endliche geordnete Mengen (M, R) kann durch ein Hassediagramm veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jedes Element von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daß a unterhalb von b liegt, wenn $a \neq b$ und $(a, b) \in R$.

Zwei Punkte a und b werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

Übung: Zeichnen sie die folgenden Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit

$$R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$$

Hasse-Diagramm von $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Beispiele

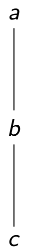
Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit

$$R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$$

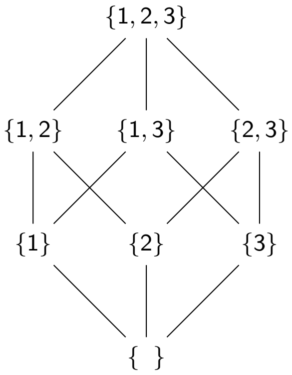
Hasse-Diagramm von $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Beispiele

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit
$$R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$$



Hasse-Diagramm von
$(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$



Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

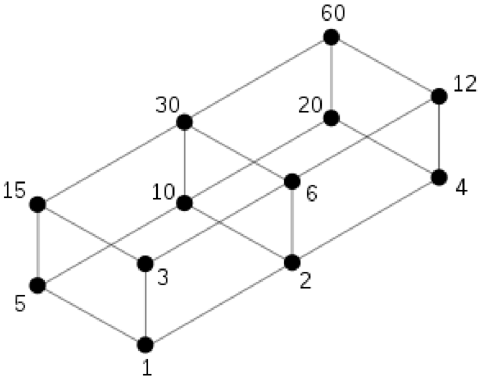
Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$, und $R = \{\langle x, y\rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$.

Hassediagramm der geordneten Menge (M, R):

Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$, und
$R = \{\langle x, y\rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$.

Hassediagramm der geordneten Menge (M, R):



Übung

Zeichnen sie ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge
$M = (\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{1,2,3\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,5\},\{1\},\{3\},\{4\},\{5\},\{\}\},\subseteq)$.

totale/partielle Ordnung

Eine binäre Ordnungsrelation ist eine totale Ordnung, gdw. sie konnex ist.

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist konnex (bzw. linear) gdw. für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: $\langle x, y \rangle \in R$ oder $\langle y, x \rangle \in R$.

- Das Hassediagramm einer total geordneten, endlichen Menge bildet eine Linie. Kein Element hat mehr als einen oberen oder unteren Nachbarn.
- Totale Ordnungen werden auch lineare Ordnungen genannt.
- In Abgrenzung zu totalen Ordnungen werden allgemeine Ordnungen auch partielle Ordnungen (oder Halbordnungen) genannt. Im Englischen spricht man von 'poset' (partially ordered set).

minimale und maximale Elemente

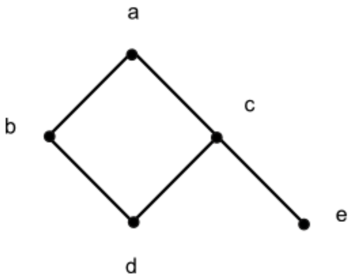
Sei $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung (stark oder schwach).

- Ein Element $x \in A$ ist minimal gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Vorgänger von x ist.
- Ein Element $x \in A$ ist maximal gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Nachfolger von x ist.
- $x \in A$ ist das Minimum von A, wenn x Vorgänger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt xRy).
- $x \in A$ ist das Maximum von A, wenn x Nachfolger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt yRx).

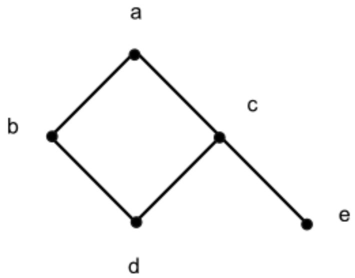
Hinweise:

- eine total geordnete Menge kann höchstens ein minimales und höchstens ein maximales Element haben.
- eine partiell geordnete Menge kann beliebig viele minimale und maximale Elemente aber höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum haben.

Beispiel



Beispiel



- a ist das einzige maximale Element und somit das Maximum der geordneten Menge.
- d und e sind die minimalen Elemente der geordneten Menge.
- die geordnete Menge hat kein Minimum,

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M. a und b heißen vergleichbar, falls aRb oder bRa; sonst unvergleichbar. Eine Teilmenge K von M heißt Kette, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt Antikette, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M. a und b heißen vergleichbar, falls aRb oder bRa; sonst unvergleichbar. Eine Teilmenge K von M heißt Kette, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt Antikette, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Satz von Dilworth

Für eine geordnete endliche Menge (M, R) gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von (M, R) ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von (M, R), die man für eine Partition von M benötigt.

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M. a und b heißen vergleichbar, falls aRb oder bRa; sonst unvergleichbar. Eine Teilmenge K von M heißt Kette, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt Antikette, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Satz von Dilworth

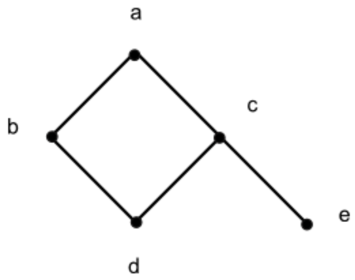
Für eine geordnete endliche Menge (M, R) gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von (M, R) ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von (M, R), die man für eine Partition von M benötigt.

Höhe / Breite

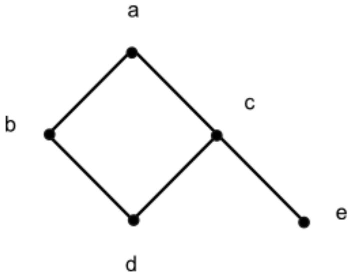
Die Höhe einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Kette von (M, R).

Die Breite einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Antikette von (M, R).

Beispiel



Beispiel



- Die Elemente a und b sind vergleichbar.
- d und e sind unvergleichbar.
- $\{a, b, d\}$ ist eine Kette der geordneten Menge.
- $\{b, c\}$ ist Antikette der geordneten Menge.
- Die geordnete Menge hat die Höhe 3 und die Breite 2.
- Die Ketten $\{a, b, d\}$ und $\{c, e\}$ bilden eine minimale Partition in Ketten der geordneten Menge.

Intervall / Ideal / Filter

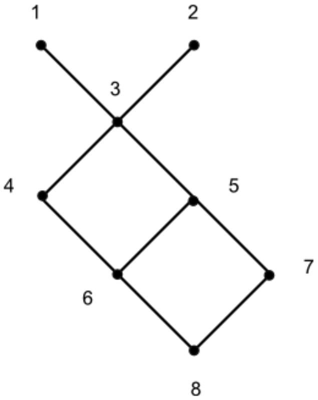
Sei $(M, \trianglelefteq)$ eine geordnete Menge:

Intervall: $[a, b] := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x \trianglelefteq b\}$

Hauptideal: $(b] := \{x \in M \mid x \trianglelefteq b\}$

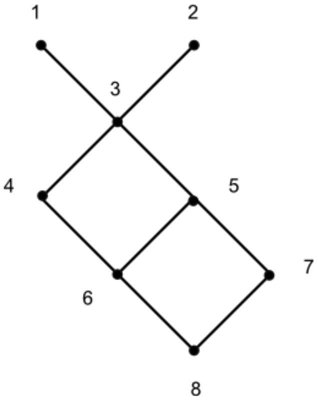
Hauptfilter: $[a) := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x\}$

Beispiel



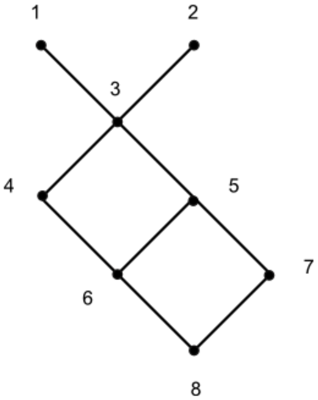
- $[6, 1] =$

Beispiel



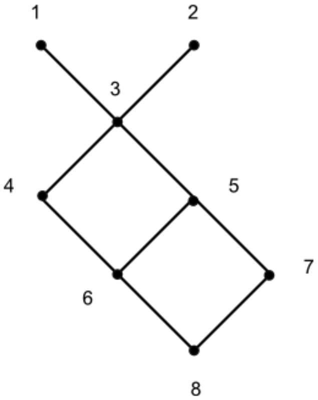
- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4] =$

Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4] = \{4, 6, 8\}$ (Hauptideal von 4)
- $[6) =$

Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4] = \{4, 6, 8\}$ (Hauptideal von 4)
- $[6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Hauptfilter von 6).

Quasiordnung

Der Begriff der Quasiordnung ist schwächer als der der Ordnung:

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Quasiordnung (oder Präordnung), wenn R

- reflexiv und
- transitiv ist.

Beispiel:

- Die Ordnung $\leq_{abs}$, die die ganzen Zahlen nach ihrem Betrag ordnet ist eine Quasiordnung aber keine Ordnung (beachte, dass $-3 \leq_{abs} 3$ und $3 \leq_{abs} -3$ aber $-3 \neq 3$).

Zusammenfassung: Ordnungen

schwache Ordnungen

	transitiv	reflexiv	anti-symmetrisch	linear/total
Quasiordnung	$\star$	$\star$		
partielle Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	
totale Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Bemerkung: (Schwache) lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

Zusammenfassung: Ordnungen

strikte Ordnungen

	transitiv	irreflexiv	asymmetrisch	linear/total
strikte partielle Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	
strikte totale Ordnung	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

Man könnte strikte Ordnungen äquivalent auch als transitive, irreflexive und antisymmetrische Relationen definieren, da eine Relation, die irreflexiv und antisymmetrisch ist, immer asymmetrisch ist.

Ordnungserhaltende Abbildungen

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heißt ordnungserhaltend, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } x \trianglelefteq y, \text{ dann } f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Eine ordnungserhaltende Abbildung ist ein Ordnungshomomorphismus.

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^2$ ist keine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathbb{Z}, \leq)$ nach $(\mathbb{Z}, \leq)$.
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{POT}(M) \to \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Terminologie und Anmerkungen

- Ordnungserhaltende Abbildungen nennt man auch isotone Abbildungen.
- Abbildungen für die aus $x \trianglelefteq y$ folgt, dass $f(y) \trianglelefteq' f(x)$ gilt, heißen antiton.
- Eine Abbildung ist monoton, wenn sie isoton oder antiton ist.
- **Vorsicht:** Häufig wird der Begriff 'monoton' auch nur für isotone Abbildungen verwendet.

Ordnungsreflektierende Abbildungen

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heißt ordnungsreflektierend, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } f(x) \trianglelefteq' f(y), \text{ dann } x \trianglelefteq y$$

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungsreflektierende Abbildung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{POT}(M) \to \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist keine ordnungsreflektierende Abbildung von $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ nach $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Satz: Ordnungsreflektierende Abbildungen sind immer injektiv.

Ordnungseinbettung

Definition

Seien $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to M'$ heißt Ordnungseinbettung, wenn sie ordnungserhaltend und ordnungsreflektierend ist, wenn also folgendes gilt:

$$x \trianglelefteq y \Leftrightarrow f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Ein Ordnungsisomorphismus ist eine bijektive Ordnungseinbettung. Gibt es einen Ordnungsisomorphismus zwischen $(M, \trianglelefteq)$ und $(M', \trianglelefteq')$, so sagt man dass die beiden geordneten Mengen (ordnungs-)isomorph sind und schreibt $(M, \trianglelefteq) \cong (M', \trianglelefteq')$.

Ein Ordnungsisomorphismus von (M, R) in sich selbst wird auch Ordnungsautomorphismus genannt.

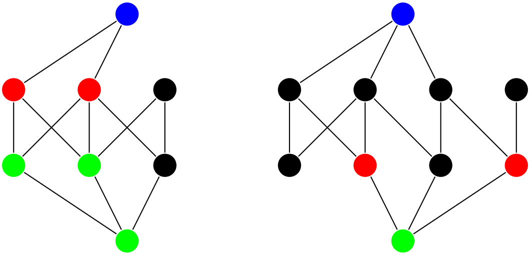
Beispiele:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -x$ ist ein Ordnungsisomorphismus von $(\mathbb{Z}, \leq)$ nach $(\mathbb{Z}, \geq)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{2}$ ist ein Ordnungsautomorphismus auf $(\mathbb{R}, \leq)$.

obere / untere Schranke

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und K eine Teilmenge von M. Ein Element x von M ist

- eine obere Schranke von K, g.d.w. für alle $y \in K : y \leq x$;
- eine untere Schranke von K, g.d.w. für alle $y \in K : x \leq y$.



Die Abbildungen zeigen die Hassediagramme zweier geordneter Mengen. Die rot markierten Elementen haben die blau markierten Elemente als obere und die grün markierten als untere Schranken.

kleinste obere / größte untere Schranke

x heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von K in M, wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese $\vee$ als 'join').

x heißt größte untere Schranke oder Infimum von K in M, wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese $\wedge$ als 'meet').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

kleinste obere / größte untere Schranke

x heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von K in M, wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese $\vee$ als 'join').

x heißt größte untere Schranke oder Infimum von K in M, wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese $\wedge$ als 'meet').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

Das Infimum ist also das Maximum aller unteren Schranken und das Supremum ist das Minimum aller oberen Schranken.

Beispiele

- Für die linear geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: $\sup[1,4] = 4$ und $\inf[1,4] = 1$.
- Für die partiell geordnete Menge $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ mit $M = \{1,2,3,4\}$ ist das Supremum von $K = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\}$ die Vereinigung aller Elemente von K, also $\sup K = \{1,2,4\}$. Das Infimum von K ist der Durchschnitt aller Elemente von K, also $\inf K = \emptyset$.

Verbände

Verband: ordnungstheoretische Definition

Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ ist ein Verband, g.d.w. zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y und das Infimum von x und y Elemente von V sind.

vollständiger Verband

Ein Verband $(V, \leq)$ ist ein vollständiger Verband, falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daß $\sup K \in V$ und $\inf K \in V$.

Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\sup V$, das Einselement (1_V) genannt, und ein kleinstes Element $\inf V$, das Nullement (0_V) genannt.

Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die Atome und die unteren Nachbarn des Einselements die Koatome des Verbands.

Bemerkungen

- Jeder endliche Verband ist vollständig.
- Da $\inf \emptyset = 1_V$ und $\sup \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge V.

Beispiele

- $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband, $\vee$ entspricht $\cup$ und $\wedge$ entspricht $\cap$.
- $([2, 5], \leq)$ ist ein vollständiger Verband.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein Verband, aber nicht vollständig.
- $\left(\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1\}\}, \subseteq\right)$ ist kein Verband.