

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Mengen und Mengenoperationen

Dozentin: Wiebke Petersen

1. Foliensatz

Frage

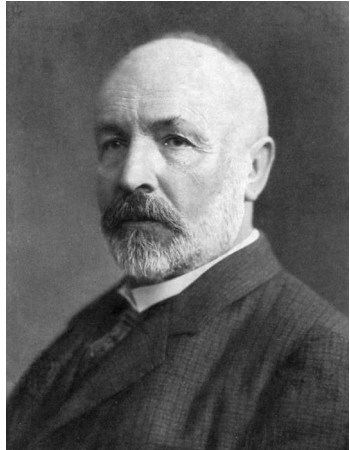
Was ist eine Menge?

1 Minute zum Nachdenken und
Diskutieren 🌀

Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ genannt werden) zu einem Ganzen.“

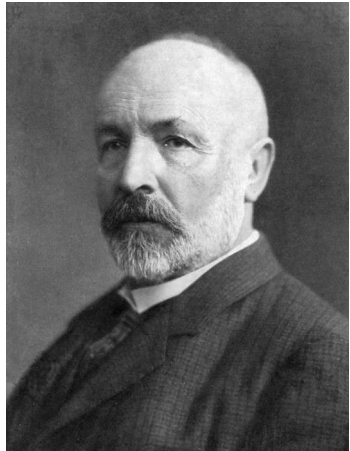


Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ genannt werden) zu einem Ganzen.“

- Mengen werden über ihre Elemente bestimmt.
- Elemente von Mengen können selber Mengen sein.
- Mengen können endlich oder unendlich sein.



Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol: \emptyset).

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol: \emptyset).
- Mengen mit genau einem Element werden **Einermengen** (*singleton*) genannt.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente: a, b, c, \dots, x, y, z
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol: \emptyset).
- Mengen mit genau einem Element werden **Einermengen** (*singleton*) genannt.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen
- \mathbb{Q} ist die Menge der rationalen Zahlen (alle ‚Bruchzahlen‘).
- \mathbb{R} ist die Menge der reellen Zahlen (alle ‚Kommazahlen‘).

Bertrand Russell (1872-1970)

Russels Antinomie (1901)

- Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Bertrand Russell (1872-1970)

Russels Antinomie (1901)

- Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Ausweg: ‚Theorie der Typen‘
(Principia Mathematica, Russel & Whitehead 1910-13)

Mengen werden stufenweise aufgebaut und sind immer von einem höheren Typ als ihre Elemente.



Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Ist ‚heterologisch‘ heterologisch?
(nach D.R. Hofstadter: *Gdel, Escher, Bach*)

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

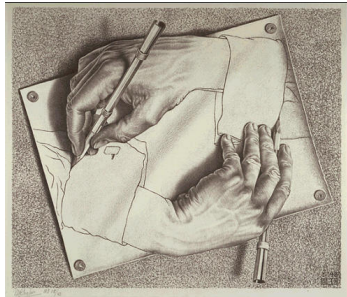
autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Ist ‚heterologisch‘ heterologisch?
(nach D.R. Hofstadter: *Gdel, Escher, Bach*)

In diesem Kurs werden Mengen so beschrieben, dass keine Paradoxien auftreten.

Paradoxien der Selbstbezüglichkeit



zeichnende Hände von M.C. Escher

Mengenbeschreibungen

Explizite Mengendarstellung

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente a_1, a_2, \dots, a_n enthält.

Beispiel:

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Implizite Mengendarstellung

$\{x|A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel:

$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$,

Mengenbeschreibungen

Explizite Mengendarstellung

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente a_1, a_2, \dots, a_n enthält.

Beispiel:

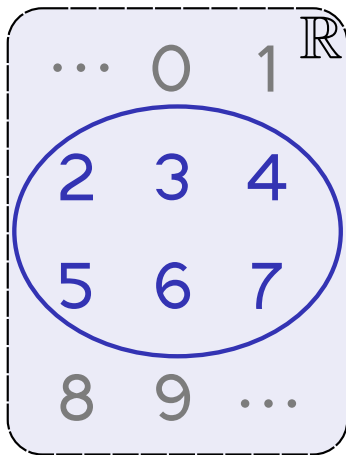
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Implizite Mengendarstellung

$\{x|A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel:

$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$,



Hinweise zur expliziten Mengendarstellung

- Beschreibung durch Aufzählung oder -listung
- nur für endliche Mengen möglich
- Die Klammern { und } heißen **Mengenklammern** oder geschweifte Klammern.
- Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- Elemente können in der Klammernotation mehrfach auftreten:
 $\{a, b, c\} = \{a, b, a, b, a, b, c\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels charakteristischer Eigenschaft

- $\{ \text{Element} \in \text{Grundbereich} \mid \text{Eigenschaft von Element} \}$
- $\{x \in G \mid E(x)\}$ („Menge aller x in G mit der Eigenschaft E “)
- Bsp.: $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
- Wenn der Grundbereich aus dem Kontext bekannt ist oder sich aus der Eigenschaft ergibt, kann er weggelassen werden.
- Bsp.: $\{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

① **Festlegung endlich vieler Startelemente:**

Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor

② **Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:**

Wenn x ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von x ein Nachkomme von Cantor.

③ **Einschränkung:**

Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

① Festlegung endlich vieler Startelemente:

Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor

② Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:

Wenn x ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von x ein Nachkomme von Cantor.

③ Einschränkung:

Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

- Was ist, wenn Cantor keine Kinder hatte?
- Lässt sich so auch die Menge der Nachkommen von Aristoteles definieren? oder die von Merlin?

Teilmengen

Eine Menge N ist eine **Teilmenge** der Menge M (in Zeichen: $N \subseteq M$) genau dann, wenn alle Elemente von N auch Elemente von M sind.

- Wenn $x \in N$, dann $x \in M$
- Wenn $y \in M$, dann muss $y \in N$ nicht unbedingt gelten, es kann aber gelten.

Eine Menge N ist eine **echte Teilmenge** der Menge M (in Zeichen: $N \subset M$) genau dann, wenn N eine Teilmenge von M ist und wenn M und N ungleich sind.

- $N \subseteq M$ und $N \neq M$
- Es gibt ein $y \in M$ mit $y \notin N$.

Wenn $N \subseteq M$, dann ist M eine **Übermenge** von N (in Zeichen: $M \supseteq N$).

Wenn $M \supseteq N$ und $M \neq N$ dann ist M eine **echte Übermenge** von N (in Zeichen: $M \supset N$).

Teilmengen

$x \in M$: x ist ein **Element** der Menge M

- $2 \in \{1, 2, 3\}$
- $2 \notin \{1, 3, 5\}$
- $\{3\} \in \{M \mid M \text{ ist eine Einermenge}\}$
- $\{3\} \notin \{3\}$

$N \subseteq M$: Die Menge N ist eine **Teilmenge** der Menge M

- $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{2, 3\} \subseteq \{2, 3\}$
- $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
(Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge!)
- $\{3\} \not\subseteq \{M \mid M \text{ ist eine Einermenge}\}$

$N \subset M$: Die Menge N ist eine **echte Teilmenge** der Menge M

- $\{1\} \subset \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2\}$

Vorsicht: Die Element-von- und die Teilmengenrelation müssen streng unterschieden werden!

Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen M und N haben dieselbe **Mächtigkeit** oder heißen **gleichmächtig** (in Zeichen: $|M| = |N|$), wenn es eine eindeutige Zuordnung der Elemente von M auf N gibt (d.h., die Zuordnung ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N und jedem Element aus N genau ein Element aus M zu.)

endliche Mengen

Die **Mächtigkeit** einer endlichen Menge (in Zeichen: $|M|$) ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{1, 2\}| = 2$
- $|\{\{1, 2\}\}| = 1$

Vorsicht: nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig!

Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

Mengenoperationen sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch **unäre** und zweistellige auch **binäre** Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M , also $POT(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$.

Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

Mengenoperationen sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch **unäre** und zweistellige auch **binäre** Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M , also $POT(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$.

$$POT(\{1, 2, 3\}) = \left\{ \begin{array}{l} \{ \} \\ \{ 1 \} \\ \{ \quad \quad 2 \} \\ \{ \quad \quad \quad 3 \} \\ \{ 1, \quad 2 \} \\ \{ 1, \quad \quad 3 \} \\ \{ \quad \quad 2, \quad 3 \} \\ \{ 1, \quad 2, \quad 3 \} \end{array} \right\}$$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n -elementige Menge, so ist $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$.

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n -elementige Menge, so ist $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n -elementige Menge, so ist $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+
$2 \times$	$2 \times$	$2 \times$...	2

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n -elementige Menge, so ist $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+
$2 \times$	$2 \times$	$2 \times$...	2

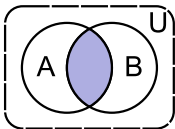
2^n Möglichkeiten

Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

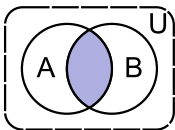


Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

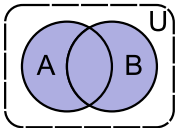
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Vereinigung: $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

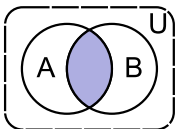


Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

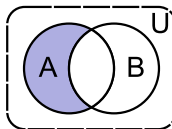
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Differenz: $A \setminus B$

„A ohne B“

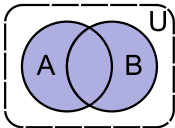
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Vereinigung: $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

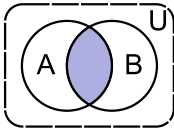


Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

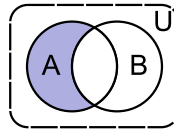
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Differenz: $A \setminus B$

„A ohne B“

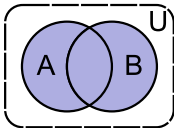
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Vereinigung: $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

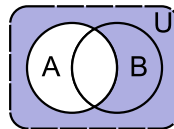
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



Komplement (in U): $C_U(A)$

„Komplement von A in U“

$$C_U(A) = U \setminus A$$



Wenn U feststeht, schreibt man auch \bar{A}

Mengenoperationen

Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

Mengenoperationen

Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}, \bar{A} = \{5, 6, 7\}$

Mengenoperationen

Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}, \bar{A} = \{5, 6, 7\}$

Notation

- Zwei Mengen A und B mit leerem Schnitt heißen **disjunkt** ($A \cap B = \emptyset$).
- Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcup A$ für die Vereinigung aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcup\{B, C, D\} = B \cup C \cup D$)
- Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcap A$ für den Schnitt aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcap\{B, C, D\} = B \cap C \cap D$)
- Häufig werden auch Indizes und Indexmengen zur Notation verwendet.
Bsp.: Sei $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \leq i\}$, dann

$$\bigcup_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \bigcap_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3\}$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

\emptyset ist **neutrales Element** der Vereinigung: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetz:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetz:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetz:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetz:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

\emptyset ist **neutrales Element** der Vereinigung: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Gibt es auch ein neutrales Element des Schnitts?

Gesetze der Komplementoperation

Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

weitere Gesetze:

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} \cap A = \emptyset$$