

# Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

## Mengen und Mengenoperationen

Dozentin: Wiebke Petersen

### 1. Foliensatz

# Frage

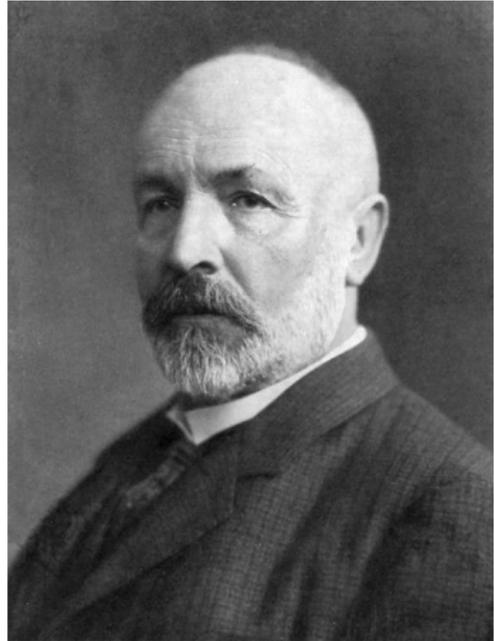
Was ist eine Menge?

1 Minute zum Nachdenken und  
Diskutieren 🌀

# Mengen

## Georg Cantor (1845-1918)

„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ genannt werden) zu einem Ganzen.“

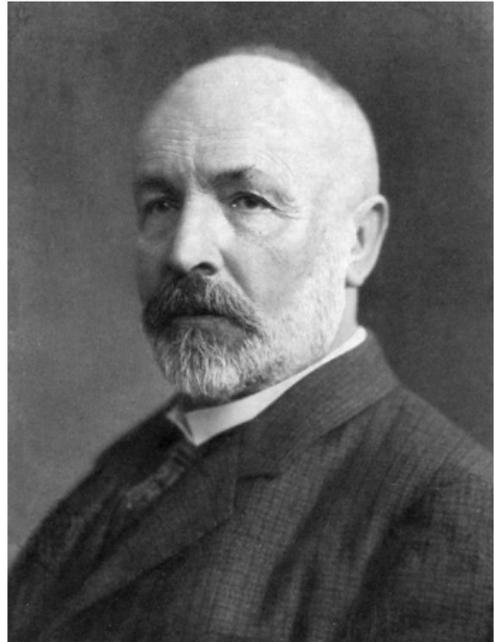


# Mengen

## Georg Cantor (1845-1918)

„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ genannt werden) zu einem Ganzen.“

- Mengen werden über ihre Elemente bestimmt.
- Elemente von Mengen können selber Mengen sein.
- Mengen können endlich oder unendlich sein.



# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$

# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist  $m$  ein Element von  $M$  so schreibt man  $m \in M$ .
- Ist  $m$  kein Element von  $M$  so schreibt man  $m \notin M$ .

# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist  $m$  ein Element von  $M$  so schreibt man  $m \in M$ .
- Ist  $m$  kein Element von  $M$  so schreibt man  $m \notin M$ .
- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und wenn jedes Element von  $B$  auch Element von  $A$  ist.

# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist  $m$  ein Element von  $M$  so schreibt man  $m \in M$ .
- Ist  $m$  kein Element von  $M$  so schreibt man  $m \notin M$ .
- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und wenn jedes Element von  $B$  auch Element von  $A$  ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol:  $\emptyset$ ).

# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist  $m$  ein Element von  $M$  so schreibt man  $m \in M$ .
- Ist  $m$  kein Element von  $M$  so schreibt man  $m \notin M$ .
- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und wenn jedes Element von  $B$  auch Element von  $A$  ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol:  $\emptyset$ ).
- Mengen mit genau einem Element werden **Einermengen** (*singleton*) genannt.

# Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$
- Variablen für Elemente:  $a, b, c, \dots, x, y, z$
- Ist  $m$  ein Element von  $M$  so schreibt man  $m \in M$ .
- Ist  $m$  kein Element von  $M$  so schreibt man  $m \notin M$ .
- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind genau dann **identisch** oder **gleich**, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und wenn jedes Element von  $B$  auch Element von  $A$  ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (Symbol:  $\emptyset$ ).
- Mengen mit genau einem Element werden **Einermengen** (*singleton*) genannt.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$  ist die Menge der rationalen Zahlen (alle ‚Bruchzahlen‘).
- $\mathbb{R}$  ist die Menge der reellen Zahlen (alle ‚Kommazahlen‘).

# Bertrand Russell (1872-1970)

## Russels Antinomie (1901)

- Sei  $M$  die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt  $M \in M$  oder  $M \notin M$ ?

# Bertrand Russell (1872-1970)

## Russels Antinomie (1901)

- Sei  $M$  die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt  $M \in M$  oder  $M \notin M$ ?

Ausweg: ‚Theorie der Typen‘  
(Principia Mathematica, Russel & Whitehead 1910-13)

Mengen werden stufenweise aufgebaut und sind immer von einem höheren Typ als ihre Elemente.



# Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

**autologisch**, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

**heterologisch**, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

# Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

**autologisch**, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

**heterologisch**, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Ist ‚heterologisch‘ heterologisch?  
(nach D.R. Hofstadter: *Gdel, Escher, Bach*)

# Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

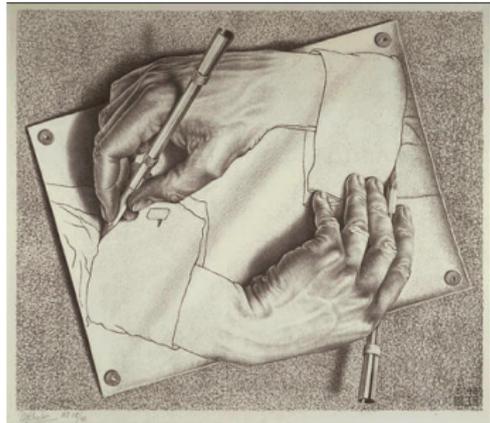
**autologisch**, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

**heterologisch**, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Ist ‚heterologisch‘ heterologisch?  
(nach D.R. Hofstadter: *Gdel, Escher, Bach*)

In diesem Kurs werden Mengen so beschrieben, dass keine Paradoxien auftreten.

## Paradoxien der Selbstbezüglichkeit



zeichnende Hände von M.C. Escher

# Mengenbeschreibungen

## Explizite Mengendarstellung

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ist die Menge, die genau die Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  enthält.

Beispiel:

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

## Implizite Mengendarstellung

$\{x|A\}$  ist die Menge, die genau die Objekte  $x$  enthält, auf die die Aussage  $A$  zutrifft.

Beispiel:

$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$ ,

# Mengenbeschreibungen

## Explizite Mengendarstellung

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ist die Menge, die genau die Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  enthält.

Beispiel:

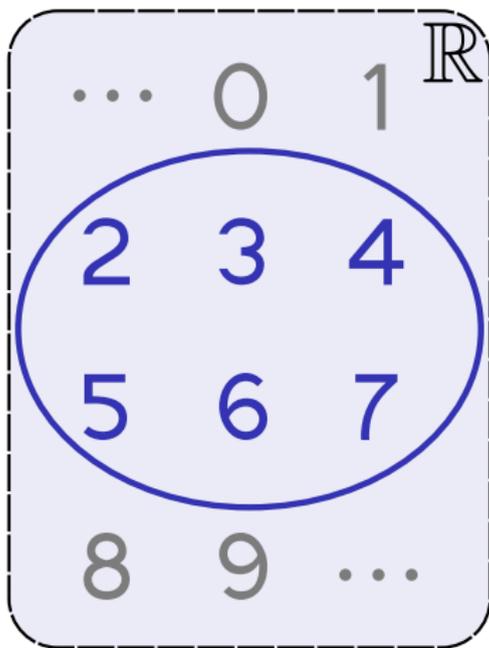
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

## Implizite Mengendarstellung

$\{x|A\}$  ist die Menge, die genau die Objekte  $x$  enthält, auf die die Aussage  $A$  zutrifft.

Beispiel:

$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$ ,



# Hinweise zur expliziten Mengendarstellung

- Beschreibung durch Aufzählung oder -listung
- nur für endliche Mengen möglich
- Die Klammern { und } heißen **Mengenklammern** oder geschweifte Klammern.
- Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle:  $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- Elemente können in der Klammernotation mehrfach auftreten:  
 $\{a, b, c\} = \{a, b, a, b, a, b, c\}$

# Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

## Beschreibung mittels charakteristischer Eigenschaft

- $\{ \text{Element} \in \text{Grundbereich} \mid \text{Eigenschaft von Element} \}$
- $\{x \in G \mid E(x)\}$  („Menge aller  $x$  in  $G$  mit der Eigenschaft  $E$ “)
- Bsp.:  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
- Wenn der Grundbereich aus dem Kontext bekannt ist oder sich aus der Eigenschaft ergibt, kann er weggelassen werden.
- Bsp.:  $\{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$

# Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

## Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

① Festlegung endlich vieler Startelemente:

Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor

② Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:

Wenn  $x$  ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von  $x$  ein Nachkomme von Cantor.

③ Einschränkung:

Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

# Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

## Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

① Festlegung endlich vieler Startelemente:

Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor

② Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:

Wenn  $x$  ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von  $x$  ein Nachkomme von Cantor.

③ Einschränkung:

Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

- Was ist, wenn Cantor keine Kinder hatte?
- Lässt sich so auch die Menge der Nachkommen von Aristoteles definieren? oder die von Merlin?

# Teilmengen

Eine Menge  $N$  ist eine **Teilmenge** der Menge  $M$  (in Zeichen:  $N \subseteq M$ ) genau dann, wenn alle Elemente von  $N$  auch Elemente von  $M$  sind.

- Wenn  $x \in N$ , dann  $x \in M$
- Wenn  $y \in M$ , dann muss  $y \in N$  nicht unbedingt gelten, es kann aber gelten.

Eine Menge  $N$  ist eine **echte Teilmenge** der Menge  $M$  (in Zeichen:  $N \subset M$ ) genau dann, wenn  $N$  eine Teilmenge von  $M$  ist und wenn  $M$  und  $N$  ungleich sind.

- $N \subseteq M$  und  $N \neq M$
- Es gibt ein  $y \in M$  mit  $y \notin N$ .

Wenn  $N \subseteq M$ , dann ist  $M$  eine **Übermenge** von  $N$  (in Zeichen:  $M \supseteq N$ ).

Wenn  $M \supseteq N$  und  $M \neq N$  dann ist  $M$  eine **echte Übermenge** von  $N$  (in Zeichen:  $M \supset N$ ).

# Teilmengen

$x \in M$ :  $x$  ist ein **Element** der Menge  $M$

- $2 \in \{1, 2, 3\}$
- $2 \notin \{1, 3, 5\}$
- $\{3\} \in \{M \mid M \text{ ist eine Einermenge}\}$
- $\{3\} \notin \{3\}$

$N \subseteq M$ : Die Menge  $N$  ist eine **Teilmenge** der Menge  $M$

- $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{2, 3\} \subseteq \{2, 3\}$
- $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$   
(Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge!)
- $\{3\} \not\subseteq \{M \mid M \text{ ist eine Einermenge}\}$

$N \subset M$ : Die Menge  $N$  ist eine **echte Teilmenge** der Menge  $M$

- $\{1\} \subset \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2\}$

Vorsicht: Die Element-von- und die Teilmengenrelation müssen streng unterschieden werden!

# Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen  $M$  und  $N$  haben dieselbe **Mächtigkeit** oder heißen **gleichmächtig** (in Zeichen:  $|M| = |N|$ ), wenn es eine eindeutige Zuordnung der Elemente von  $M$  auf  $N$  gibt (d.h., die Zuordnung ordnet jedem Element aus  $M$  genau ein Element aus  $N$  und jedem Element aus  $N$  genau ein Element aus  $M$  zu.)

## endliche Mengen

Die **Mächtigkeit** einer endlichen Menge (in Zeichen:  $|M|$ ) ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{1, 2\}| = 2$
- $|\{\{1, 2\}\}| = 1$

Vorsicht: nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig!

# Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

**Mengenoperationen** sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch **unäre** und zweistellige auch **binäre** Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die **Potenzmenge** einer Menge  $M$  ist die Menge aller möglichen Teilmengen von  $M$ , also  $POT(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$ .

# Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

**Mengenoperationen** sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch **unäre** und zweistellige auch **binäre** Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die **Potenzmenge** einer Menge  $M$  ist die Menge aller möglichen Teilmengen von  $M$ , also  $POT(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$ .

$$POT(\{1, 2, 3\}) = \left\{ \begin{array}{l} \{ \} \\ \{ 1 \} \\ \{ \quad 2 \} \\ \{ \quad \quad 3 \} \\ \{ 1, 2 \} \\ \{ 1, \quad 3 \} \\ \{ \quad 2, 3 \} \\ \{ 1, 2, 3 \} \end{array} \right\}$$

# Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist  $M$  eine  $n$ -elementige Menge, so ist  $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$ .

# Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist  $M$  eine  $n$ -elementige Menge, so ist  $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$ .

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+

# Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist  $M$  eine  $n$ -elementige Menge, so ist  $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$ .

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+
$2 \times$	$2 \times$	$2 \times$	...	2

# Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist  $M$  eine  $n$ -elementige Menge, so ist  $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$ .

1	2	3	...	n
-	-	-	...	-
+	-	-	...	-
-	+	-	...	-
-	-	+	...	-
⋮				⋮
-	-	-	...	+
+	+	-	...	-
+	-	+	...	-
⋮				⋮
+	+	+	...	+
$2 \times$	$2 \times$	$2 \times$	...	2

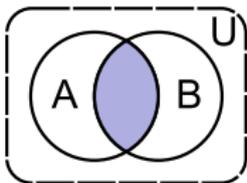
$2^n$  Möglichkeiten

# Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt:  $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

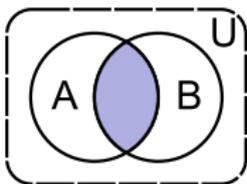


# Mengenoperationen (binäre Operationen)

**Schnitt:**  $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

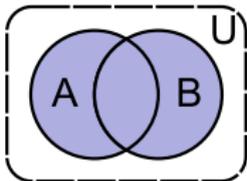
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



**Vereinigung:**  $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

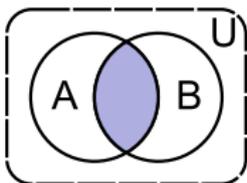


# Mengenoperationen (binäre Operationen)

**Schnitt:**  $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

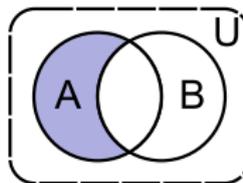
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



**Differenz:**  $A \setminus B$

„A ohne B“

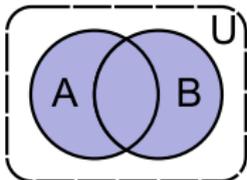
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



**Vereinigung:**  $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

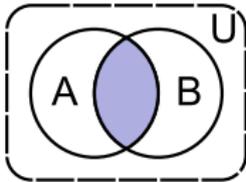


# Mengenoperationen (binäre Operationen)

**Schnitt:**  $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

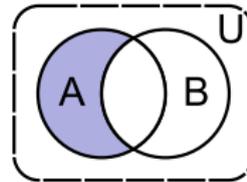
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$



**Differenz:**  $A \setminus B$

„A ohne B“

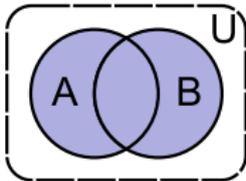
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



**Vereinigung:**  $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

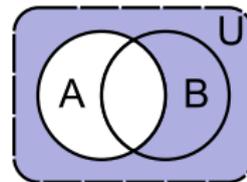
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



**Komplement (in U):**  $C_U(A)$

„Komplement von A in U“

$$C_U(A) = U \setminus A$$



Wenn  $U$  feststeht, schreibt man auch  $\bar{A}$

# Mengenoperationen

## Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

# Mengenoperationen

## Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}, \bar{A} = \{5, 6, 7\}$

# Mengenoperationen

## Beispiele

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}, \bar{A} = \{5, 6, 7\}$

## Notation

- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  mit leerem Schnitt heißen **disjunkt** ( $A \cap B = \emptyset$ ).
- Wenn  $A$  eine Menge von Mengen ist, schreiben wir  $\bigcup A$  für die Vereinigung aller Elemente von  $A$  (Bsp.:  $\bigcup\{B, C, D\} = B \cup C \cup D$ )
- Wenn  $A$  eine Menge von Mengen ist, schreiben wir  $\bigcap A$  für den Schnitt aller Elemente von  $A$  (Bsp.:  $\bigcap\{B, C, D\} = B \cap C \cap D$ )
- Häufig werden auch Indizes und Indexmengen zur Notation verwendet.  
Bsp.: Sei  $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \leq i\}$ , dann

$$\bigcup_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \bigcap_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0, 1, 2, 3\}$$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

**Kommutativgesetze:**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

**Assoziativgesetze:**

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

## Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

## Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

## Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

## Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

## Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

## Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

## Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

## Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

## Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

## Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

## Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$\emptyset$  ist **neutrales Element** der Vereinigung:  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

# Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

## Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

## Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

## Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

## Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$\emptyset$  ist **neutrales Element** der Vereinigung:  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Gibt es auch ein neutrales Element des Schnitts?

# Gesetze der Komplementoperation

# Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

# Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

weitere Gesetze:

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} \cap A = \emptyset$$