

# Pāṇinis Śivasūtras

Wiebke Petersen

अइउण्। ऋलृक्। एओङ्। ऐऔच्। हयवरट्।  
लण्। ञमङणनम्। झभञ्। घढधष्। जबगडदश्।  
खफछठथचटतव्। कपय्। शषसर्। हल्।

# Die Bedeutung der Phonologie in Sanskritgrammatiken

## Sandhi-Beispiele

- na asti iha → nāstīha
- na iha → neha
- adya eva → adyaiva
- upari upari → upary upari
- te api → te 'pi
- vane āste → vana āste
- tasmai adāt → tasmā adāt

# Die Bedeutung der Phonologie in Sanskritgrammatiken

## Rezitationsformen

Nach Staal 1974 zwischen dem 10. und 7. Jahrhundert v. Chr.:

**Samhitāpāṭha:** Rezitation ganzer kontinuierlicher Verse

**Padapāṭha:** *Wort-für-Wort* Rezitation

Beispiel aus der Ṛgveda (10.127.2):

**Samhitāpāṭha:** órv aprā ámartyā niváto devy̐ udvátaḥ //

**Padapāṭha:** /á/urú/aprāḥ/ámartyā/ni-vátaḥ/deví/ut-vátaḥ //

„The immortal goddess has pervaded the wide space, the depths and the heights.“

# Pāṇinis Sanskritgrammatik (ca. 350 v. Chr.)

## Bestandteile von Pāṇinis Grammatik

- ① *Śivasūtras*: mit Markern durchsetzte Lautliste
- ② *Aṣṭādhyāyī*: System von ca. 4 000 grammatischen Regeln
- ③ *Dhātupāṭha*: Verzeichnis von ca. 2 000 Verbalwurzeln
- ④ *Gaṇapāṭha*: Liste von Gruppen nonverbaler Stämme

## Bloomfield 1992

The descriptive grammar of Sanskrit, which Pāṇini brought to its perfection, is one of the greatest monuments of human intelligence and an indispensable model for the description of languages.

# Ökonomieprinzip in den *Aṣṭādhyāyī* (*lāghava*)

- Wortstellung zielt auf Minimierung der Silbenzahl
- Verzicht auf Verben
- Ordnung der *Sūtras* nicht primär thematisch
- Vererbungshierarchie durch Überschriften (nicht thematisch)
- Unmittelbar nachfolgende Regeln einer Regel erben deren kompatible Bestandteile (*Anuvṛtti*-Vererbung).
- Das Prinzip des *kollektiven Blockierens* regelt die Regelordnung.

⇒ Die *Aṣṭādhyāyī* bilden eine nichtmonotone Vererbungshierarchie mit Defaults, in der **Regelbestandteile** vererbt werden.

Altes indisches Sprichwort: „Die Grammatiker achten das Einsparen einer Mora in gleicher Weise wie die Geburt eines Sohnes.“

## Ökonomieprinzip in den *Aṣṭādhyāyī* (*lāghava*)

- Wortstellung zielt auf Minimierung der Silbenzahl
  - Verzicht auf Verben
  - Ordnung der *Sūtras* nicht primär thematisch
  - Vererbungshierarchie durch Überschriften (nicht thematisch)
  - Unmittelbar nachfolgende Regeln einer Regel erben deren kompatible Bestandteile (*Anuvṛtti*-Vererbung).
  - Das Prinzip des *kollektiven Blockierens* regelt die Regelordnung.
- ⇒ Die *Aṣṭādhyāyī* bilden eine nichtmonotone Vererbungshierarchie mit Defaults, in der **Regelbestandteile** vererbt werden.

Altes indisches Sprichwort: „Die Grammatiker achten das Einsparen einer Mora in gleicher Weise wie die Geburt eines Sohnes.“

# Phonologische Regeln

## moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C\_D$$

## Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

## Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि )
- Analyse: [ik]<sub>GEN</sub>[yaṇ]<sub>NOM</sub>[ac]<sub>LOK</sub>
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

# Phonologische Regeln

## moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C\_D$$

## Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

## Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि )
- Analyse: [ik]<sub>GEN</sub>[yaṇ]<sub>NOM</sub>[ac]<sub>LOK</sub>
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]



# Phonologische Regeln

## moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C\_D$$

## Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

## Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि )
- Analyse: [ik]<sub>GEN</sub>[yaṇ]<sub>NOM</sub>[ac]<sub>LOK</sub>
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

# Metaregeln legen den Gebrauch der Kasusmarker fest

## Beispiel einer Metaregel

**Sūtra 1.1.49** *ṣaṣṭhī sthāneyogā* ( षष्ठी स्थानेयोगा )

„Der Genitiv in einem *Sūtra* bezeichnet dasjenige, an dessen Stelle etwas treten soll.“

# Pāṇinis Śivasūtras

अइउण्। ऋलृक्। एओङ्। ऐऔच्। हयवरट्।  
 लण्। ञमङणनम्। झभञ्। घढधष्। जबगडदश्।  
 खफछठथचटतव्। कपय्। शषसर्। हल्।

*a·i·uṅ | ṛ·lṛk | e·oṅ | ai·auc | hayavarat |*  
*laṅ | ṅamaṅaṅanam | jhabhañ | ghadhadhaṣ | jabagaḍadaś |*  
*khaphachathathacaṭataṅ | kapay | śaṣasar | hal |*

## Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			N	अइउण्। ऋलृक्। <i>a·i·uṅ   ṛ·lṛk  </i>
2.				r	!	K	
3.		e	o			Ñ	एओङ्। ऐऔच्। <i>e·oñ   ai·auc  </i>
4.		ai	au			C	
5.	h	y	v	r		T	हयवरट्। लण्। <i>hayavarat   laṅ  </i>
6.					l	N	
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M	ऋमङ्णनम्। झभञ्। <i>ñamaṅṇanam   jhabhañ  </i>
8.	jh	bh				Ñ	
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ	घढधष्। जबगडदश्। <i>ghaḍhadhaṣ   jabagaḍadaś  </i>
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ	
11.	kh	ph	ch	ṭh	th		
			c	ṭ	t	V	खफछठथचटतव्। <i>khaphachathathacaṭatav  </i>
12.	k	p				Y	
13.			ś	ṣ	s	R	कपय्। शषसर्। हल्। <i>kapay   śaṣasar   hal  </i>
14.	h					L	

## Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			Ṇ
2.				r	!	Ḷ
3.		e	o			ṅ
4.		ai	au			Ḍ
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	ṇ
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	Ṃ
8.	jh	bh				ṅ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

अइउण्। ऋलृक्।

*a·i·uṅ | ṛ·lṛk*

एओङ्। ऐऔच्।

*e·oṅ | ai·auc*

हयवरट्। लण्।

*hayavarṭ | laṅ*

ऋमङणनम्। झभञ्।

*ṛmaṅṇanam | jhabhañ*

घढधष्। जबगडदश्।

*ghaḍhadhaṣ | jabagaḍadaś*

खफछठथचटतव्।

*khaphachathathacaṭataṅ*

कपय्। शषसर्। हल्।

*kapay | śaṣasar | hal*

## Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			N
2.				r	!	K
3.		e	o			Ñ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		T
6.					l	N
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				Ñ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

Marker  
(Anubandhas)

अइउण्। ऋलृक्।

*a·i·uṅ | ṛ·lṛk |*

एओङ्। ऐऔच्।

*e·oṅ | ai·auc |*

हयवरट्। लण्।

*hayavarat | laṅ |*

ऋमङणनम्। झभञ्।

*ṛmaṅṇanam | jhabhañ |*

घढधष्। जबगडदश्।

*ghaḍhadhaṣ | jabagaḍadaś |*

खफछठथचटतव्।

*khaphachathathacaṭatav |*

कपय्। शषसर्। हल्।

*kapay | śaṣasar | hal |*

## Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			N
2.				r	!	K
3.		e	o			Ñ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		T
6.					l	N
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				Ñ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

Marker  
(Anubandhas)

अइउण्। ऋलृक्।

*a·i·uṅ | ṛ·lṛk |*

एओङ्। ऐऔच्।

*e·oṅ | ai·auc |*

हयवरट्। लण्।

*hayavarat | laṅ |*

ऋमङणनम्। झभञ्।

*ṛmaṅṇanam | jhabhañ |*

घढधष्। जबगडदश्।

*ghaḍhadhaṣ | jabagaḍadaś |*

खफछठथचटतव्।

*khaphachathathacaṭatav |*

कपय्। शषसर्। हल्।

*kapay | śaṣasar | hal |*

# Pratyāhāras

1.		a	i	u				Ṇ
2.					r	!		Ḳ
3.			e	o				Ṇ̃
4.			ai	au				C̣
5.		h	y	v	r			Ṭ̣

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.



# Pratyāhāras

1.	a	i	u		Ṇ
2.				r	!
3.		e	o		Ṇ
4.		ai	au		C
5.	h	y	v	r	Ṭ

iK

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.

# Pratyāhāras

1.	a	i	u	Ṇ	
2.			r	!	K
3.		e	o	Ṇ̇	
4.		ai	au	C	
5.	h	y	v	r	Ṭ

iK = ⟨i, u, r, !⟩

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.

# Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	Ḳ
3.			e	o		Ṇ
4.			ai	au		C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/\_\_ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/\_\_ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

# Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	Ḳ
3.			e	o		Ṇ
4.			ai	au		C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/\_\_ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/\_\_ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

# Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	Ḳ
3.		e	o			Ṇ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/\_\_ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/\_\_ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

# Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/\_\_ [aC]

1.	a	i	u		Ṇ
2.				ṛ	ḷ
3.		e	o		Ṇ
4.		ai	au		C
5.	h	y	v	r	Ṭ
6.				l	Ṇ

- [iK] → [yN]/\_\_ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/\_\_ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

# Die in den *Aṣṭādhyāyī* vorkommenden *Pratyāhāras*

<i>Pratyāhāra</i>			<i>Sūtra</i>	<i>Pratyāhāra</i>			<i>Sūtra</i>
1.	aK	अक्	6.1.101.	22.	jh̄aY	झय्	5.4.111.
2.	aC	अच्	1.1.10.	23.	jh̄aR	झर्	8.4.65
3.	aṬ	अट्	8.3.3.	24.	jh̄aL	झल्	6.1.180
4.	aṆ	अण्	1.1.51.	25.	jh̄aŚ	झश्	8.4.53.
5.	aṅ	अण्	1.1.69.	26.	jh̄aṢ	झष्	8.2.37.
6.	aM	अम्	8.3.6.	27.	bh̄aŚ	भश्	8.2.37.
7.	aL	अल्	1.1.56	28.	bh̄aṢ	भष्	8.2.37.
8.	aŚ	अश्	8.3.17.	29.	m̄aY	मय्	8.3.33.
9.	iK	इक्	1.1.3.	30.	yaṅ	यञ्	7.3.101.
10.	iC	इच्	6.1.104.	31.	yaṆ	यण्	1.1.45.
11.	iṆ	इण्	2.4.45	32.	yaM	यम्	8.4.64.
12.	uK	उक्	8.1.70.	33.	yaY	यय्	8.4.58.
13.	eṆ	एण्	6.1.69.	34.	yaR	यर्	8.4.45.
14.	eC	एच्	1.1.48.	35.	*rĀ	रअ	1.1.51.
15.	aiC	ऐच्	7.8.8.	36.	raL	रल्	1.2.26.
16.	kh̄aY	खय्	7.4.61.	37.	vaL	वल्ल	6.1.66.
17.	kh̄aR	खर्	8.4.55	38.	vaŚ	वश्	7.2.8.
18.	ṅaM	णम्	8.3.32.	39.	śaR	शर्	7.4.4.
19.	caR	चर्	8.4.54.	40.	śaL	शल्ल	3.1.45.
20.	chaV	छव्	8.3.7.	41.	haL	हल्	3.1.12.
21.	jaŚ	जश्	8.2.39.	42.	haŚ	हश्	6.1.64.

# Ist \*rĀ ein *Pratyāhāra*?

## 1.1.51 *uraṅ raparaḥ* (उरण् रपरः)

PP: *uḥ aṅ ra-paraḥ* (उः अण् र-परः)

### Analyse

- Vasu 1891: *r*-GEN aṅ *r-paraḥ* (gefolgt von *r*) – „Wenn *r* durch {*a, i, u*} ersetzt wird, so wird es von *r* gefolgt.“ → *ar* ist der *Guṇa* von *r*.
- Katre 1987: *r*-GEN aṅ *rĀ-paraḥ* → *ar* ist der *Guṇa* von *r* und *a* ist der *Guṇa* von *!*.

### Bewertung

- Nach Vasu ist die fehlende *Guṇa*-Form von *!* eine Lücke in den *Aṣṭādhyāyī*.
- Nach Katre ist *rĀ* ein *Pratyāhāra* und das 6. *Sūtra* heißt nicht *laṅ* (*a* Bindevokal), sondern *lĀṅ* (*Ā Anubandha*) ⇒ in dem 5. *Sūtra* folgen zwei *Anubandhas* aufeinander!



# Statements zu den Śivasūtras

## Boethlingk 1887

Die Anordnung der *Sūtra* kann uns hier und da befremden, ist aber streng durchdacht und in bewunderungswürdiger Weise durchgeführt. Erstrebt wird die möglichste Kürze und Vermeidung aller Wiederholungen, und dieses wird ohne allen Zweifel erreicht.

# Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

## Faddegon 1929

Proposition I: The Śiva-Sūtra has a double purport. The chief purport is a phonetical classification. The sūtra presupposes the traditional alphabet and together with this alphabet affords the means for a concise phonetical terminology. In this respect the Śiva-Sūtra deserve praise.

Proposition II: The subordinate purport of the Śiva-Sūtra is to afford the means of formulating concisely euphonic and morphological rules. Although on the whole very interesting and ingenious, this grammatical use of the Śiva-Sūtra in many cases degenerates into subtlety.

In the case of the contact-consonants, namely, the alphabet shows a more logical order than the sūtra, while at the same time we can prove that the illogical order of the sūtra is due to the desire of obtaining pratyāhāras which may be useful for the formulation of the phonetical and morphological rules.

[S]till I am inclined to think that a more complete analysis of only this introductory sūtra might show that even in the subtlety of Pāṇini there lies genius

# Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

## Misra 1966

The arrangement of Śiva Sūtras is thus more in consonance with the structural framework of the whole grammar than with phonetic criteria, and as such the defence put forth by Thieme, 'The arrangement of Pāṇini's list of sounds is explainable as due to the phonetic catalogue of sounds having been adopted to the practical requirements of the grammar in which Pāṇini wanted to refer to certain groups of sounds by short expressions,' [Thieme 1935] needs a modification. It is not a *phonetic catalogue*; [e. g.] the grouping of *h* with *y v r l* on one hand and with *ś ṣ s* on the other is based not so much on phonetic qualities of *h* as on its peculiar behaviour as initial and final on one hand, and medial on the other.

# Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

## Kiparsky 1991

The reasoning from economy goes like this. To be grouped together in a *pratyāhāra*, sounds must make up a continuous segment of the list. Economy requires making the list as short as possible, which means avoiding repetitions of sounds, and using as few markers as possible.

# Erklärungen zum Aufbau der Śivasūtras

- Ökonomieprinzip + Logik des speziellen und des generellen Falls (Kiparsky 1991)
- Prinzip der homorganischen Kontinuität (Staal 1962)
- Prinzip der historischen Kontinuität (Cardona 1962)

# Varga-System (ca. 700 v. Chr.)

Vokale	a	ā	i	ī	u	ū	ṛ	ṝ	!
	e	o	ai	au					
Konsonanten									
<i>Sparśa:</i>	k		kh		g		gh		ṅ
	c		ch		j		jh		ñ
	ṭ		ṭh		ḍ		ḍh		ṇ
	t		th		d		dh		n
	p		ph		b		bh		m
<i>Antaḥsthā:</i>	y		r		l		v		
<i>Ūṣman:</i>	ś		ṣ		s		h		
zusätzliche Laute:									
<i>Anusvāra:</i>	ṁ								
<i>Visarga:</i>	ḥ								
<i>Jihvāmūlīya:</i>	ḥ								
<i>Upadhmānīya:</i>	ḥ								

Desphande 1995

# Minimalitätskriterium

Gesamtliste:

aiu **N** ṛ!**K** eo **Ñ** aiau **C** hyvr **T** l**N** ñmñṇn **M** jh bh **Ñ** gh ḍ dh **Ṣ**  
 jbg ḍ d **Ṣ** kh ph ch ṭh th c ṭ t **V** kp **Y** ś ṣ s **R** h **L**

## Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist  
 ⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!

# Minimalitätskriterium

Lautliste:

aiu ṛ! eo aiau hyvr l ñmñṇn jhbh ghḍhdh  
jbgḍd khphchṭhthcṭt kp śṣs h

## Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist  
⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!



# Kiparskys Argumentation

## Kiparsky 1991

Consequently, if class *A* properly includes class *B*, the elements shared with *B* should be listed last in *A*; the marker that follows can then be used to form *Pratyāhāras* for both *A* and *B*. In this way the economy principle, by selecting the shortest grammar, determines both the ordering of sounds and the placement of markers among them.

$aK = \{a, i, u, r, \text{!}\}$ ,  $iK = \{i, u, r, \text{!}\}$  und  $uK = \{u, r, \text{!}\} \Rightarrow a < i < u < r, \text{!}$

aber:

$jhL = \{h, s, \text{ṣ}, \acute{s}, p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jhR = \{s, \text{ṣ}, \acute{s}, p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jhY = \{p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jh\acute{S} = \{d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$  und

$jh\text{Ṣ} = \{dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$\Rightarrow h < s, \text{ṣ}, \acute{s} < p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d < \text{ḍ}, g, b, j < dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh$

# Staal zum doppelten *h*

## Staal 1962

[T]he double occurrence of *h* enables Pāṇini to combine the sound *h* on the one hand with the semivowels, nasals, and voiced stops [. . .], on the other hand with the fricatives. This reflects the phonetic fact that *h* is the only voiced fricative. The above analysis shows that it was impossible to solve this difficulty in any other way, as the rows could not have been ordered differently.

# Aufgabenstellung

## Fragen

in bezug auf die konkreten Śivasūtras Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis Śivasūtras minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der Śivasūtras ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

# Aufgabenstellung

## Fragen

in bezug auf die konkreten Śivasūtras Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis Śivasūtras minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der Śivasūtras ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

# Lösung des Problems mit erschöpfender Suche?

Für jede beliebige Menge von Mengen gibt es eine von Markern unterbrochenen Liste, so daß sich jede der Mengen als *Pratyāhāra* darstellen läßt:

Sei  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  eine Menge von Mengen mit  $S_i = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{n_i}}\}$  und  $M = \{M_1, \dots, M_n\}$  eine Menge mit  $M \cap S_i = \emptyset$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann ist

$$s_{1_1}, \dots, s_{1_{n_1}}, M_1, s_{2_1}, \dots, s_{2_{n_2}}, M_2, \dots, M_{n-1}, s_{n_1}, \dots, s_{n_{n_n}}, M_n$$

eine solche Liste. *Pratyāhāra* von  $S_i$ :  $s_{i_1} M_i$

⇒ obere Schranke für Länge der *Anubandha*- und Länge der Lautliste

Beispiel:  $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\}$

$$abM_1abcM_2abcdM_3aeM_4aefM_5aefgM_6$$

# Lösung des Problems mit erschöpfender Suche?

## Erschöpfende Suche

- $n$  = Zahl der Laute,  $v$  = obere Schranke für Zahl benötigter Verdopplungen:
- Bilde alle Lautlisten mit Längen zwischen  $n$  und  $n + v$ .
- Unterbreche die Listen mit *Anubandhas* (keine zwei nebeneinander).
- Entferne alle Listen, in denen die Mengen keine Intervalle bilden.
- Wähle die Listen, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllen.

$$\text{Zahl zu bildender Listen: } \sum_{k=0}^v 2^{n+k} (n+k)! \binom{n+k-1}{k}$$

Für Pāṇinis *Pratyāhāras* ( $n = 42$ ,  $v = 1$ ):  $10^{67}$

## Lösung des Problems mit erschöpfender Suche? (Details)

Zahl aller Lautlisten der Länge  $n + v_1$  ( $0 \leq v_1 \leq v$ ), wenn feststeht, welche der  $n$  Laute verdoppelt werden:

$$(n + v_1)!$$

Zahl der Möglichkeiten, die zu verdoppelnden Elemente zu wählen:

$$\binom{n + v_1 - 1}{v_1}$$

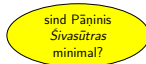
⇒ Lautlisten, in denen nicht mehr als  $v$  Elemente doppelt vorkommen:

$$\sum_{k=0}^v (n + k)! \binom{n + k - 1}{k}$$

Da keine zwei Marker direkt aufeinanderfolgen sollen, gibt es für eine Lautliste mit  $n$  Elementen genau  $2^n$  Möglichkeiten sie mit Markern zu unterbrechen. Zahl insgesamt zu bildender Listen:

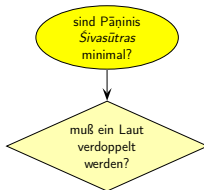
$$\sum_{k=0}^v 2^{n+k} (n + k)! \binom{n + k - 1}{k}$$

# Flußdiagramm

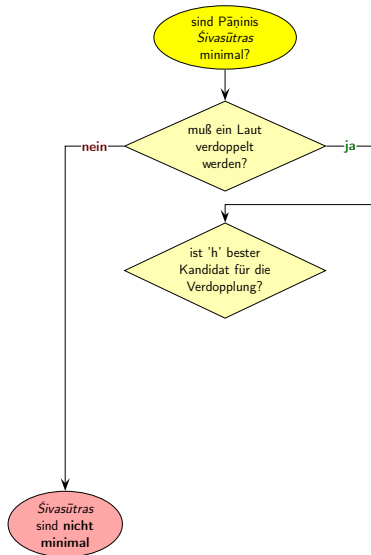




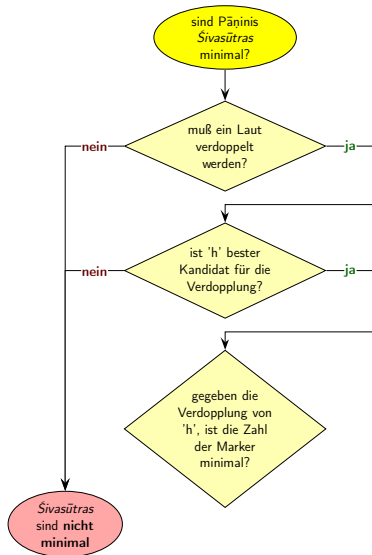
# Flußdiagramm



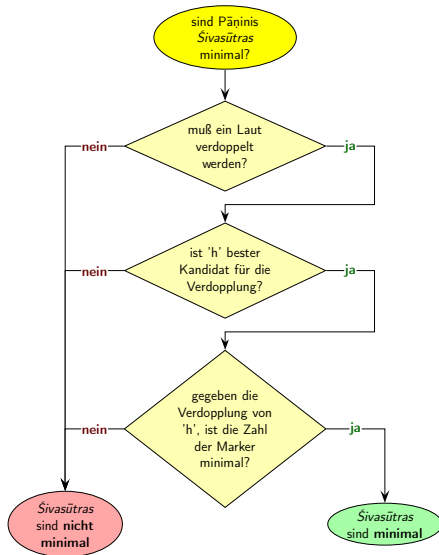
# Flußdiagramm



# Flußdiagramm



# Flußdiagramm



# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\}, \\ \{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$$

S-Alphabet  $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$  von  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

totale Ordnung auf  $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Markermenge

# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$   
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet  $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$  von  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

totale Ordnung auf  $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Markermenge

# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$   
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet  $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$  von  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

totale Ordnung auf  $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Markermenge

# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$   
 $\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$   
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet  $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$  von  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

totale Ordnung auf  $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Markermenge

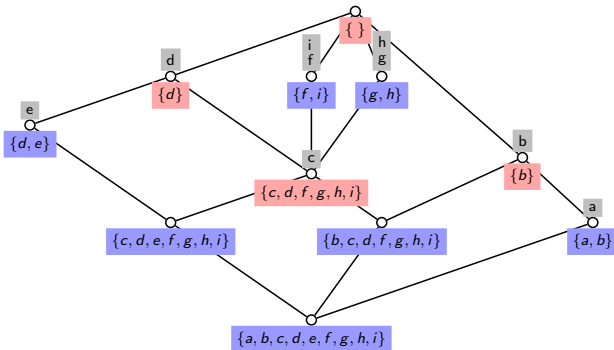
$\Rightarrow (\mathcal{A}, \Phi)$  ist ohne Verdopplung S-darstellbar



# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$   
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

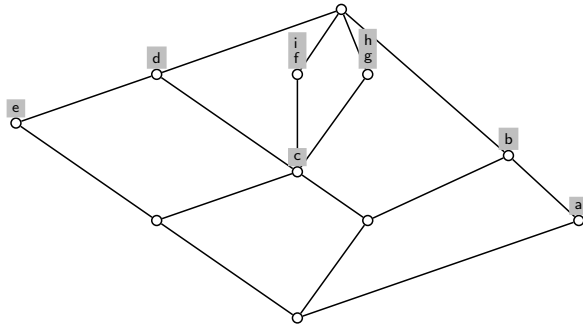


$(\mathcal{A}, \Phi)$ -Begriffsverband

# Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem  $(\mathcal{A}, \Phi)$ :  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

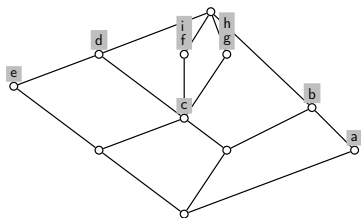
$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$   
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$



$(\mathcal{A}, \Phi)$ -Begriffsverband

S-Darstellbarkeit  $\Rightarrow$  Plättbarkeit**Hauptsatz der S-Darstellbarkeit (Teilaussage 1)**

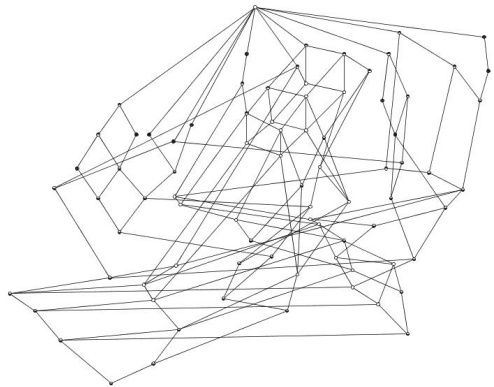
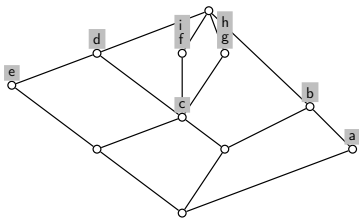
Wenn  $(\mathcal{A}, \Phi)$  ohne Verdopplung S-darstellbar ist, dann ist der  $(\mathcal{A}, \Phi)$ -Begriffsverband ein plättbarer Graph.



# S-Darstellbarkeit $\Rightarrow$ Plättbarkeit

## Hauptsatz der S-Darstellbarkeit (Teilaussage 1)

Wenn  $(\mathcal{A}, \Phi)$  ohne Verdopplung S-darstellbar ist, dann ist der  $(\mathcal{A}, \Phi)$ -Begriffsverband ein plättbarer Graph.

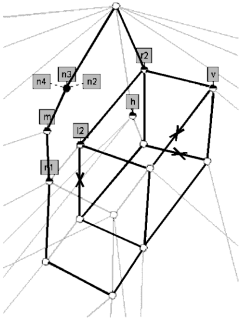


Graph von Pāṇinis *Pratyāhāra*-Begriffsverband

# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

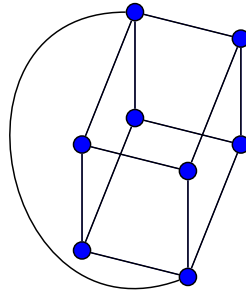
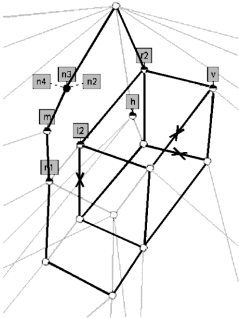
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

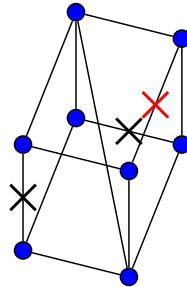
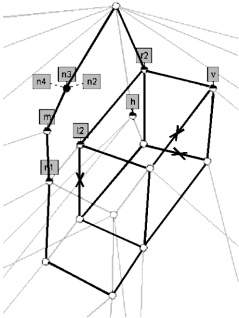
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

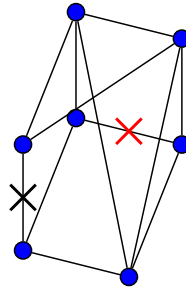
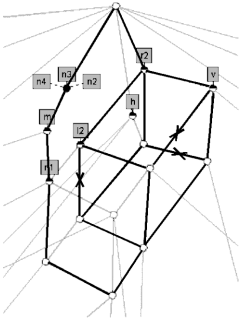
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.

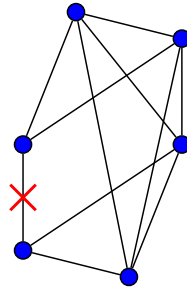
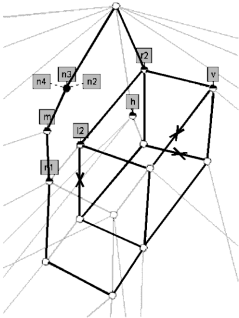




# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

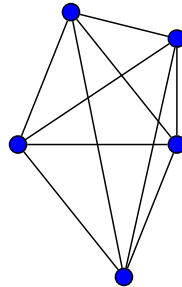
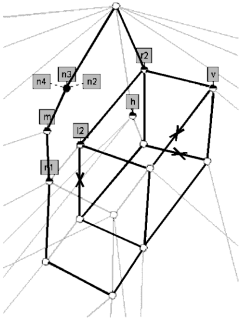
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

## Satz von Kuratowski

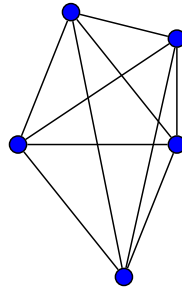
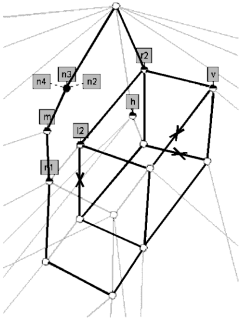
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



# Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

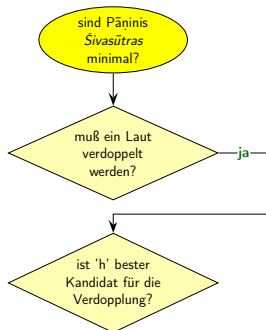
## Satz von Kuratowski

Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.

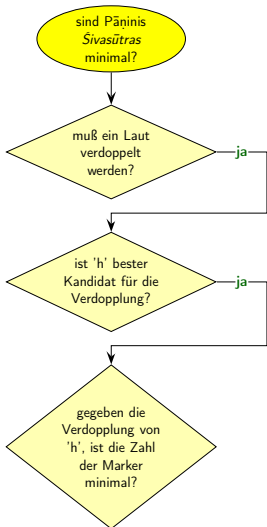


Das von Pāṇinis *Pratyāhāra*s denotierte Lautklassensystem ist ohne Verdopplung nicht S-darstellbar!

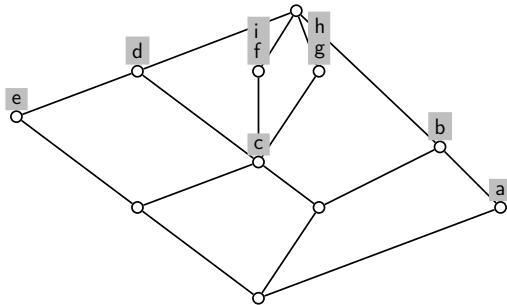
# Flußdiagramm



# Flußdiagramm



# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

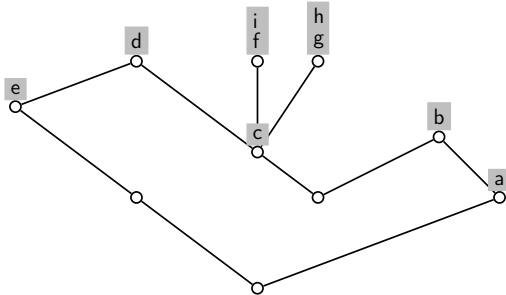


## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

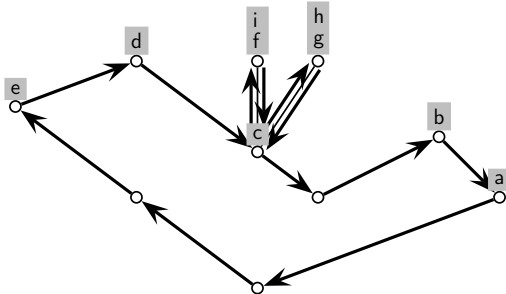


## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den **S-Graphen**:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



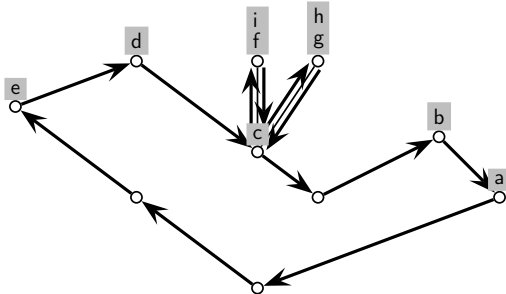
## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und **laufe** durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.



# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

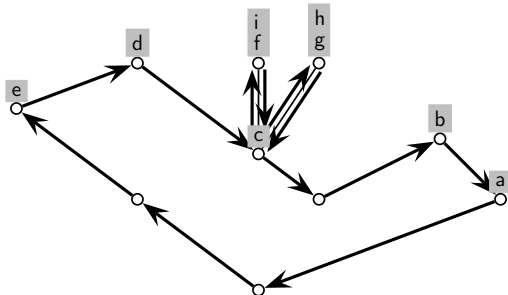


## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



e

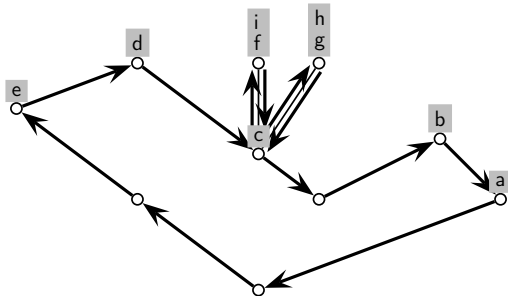
---

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- **Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an,** außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



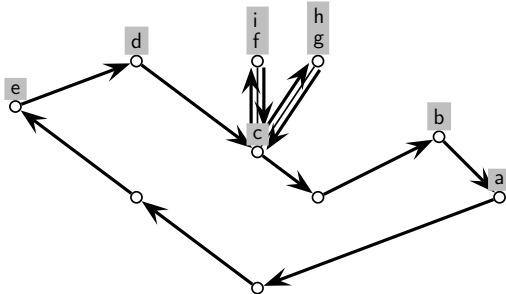
ed

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



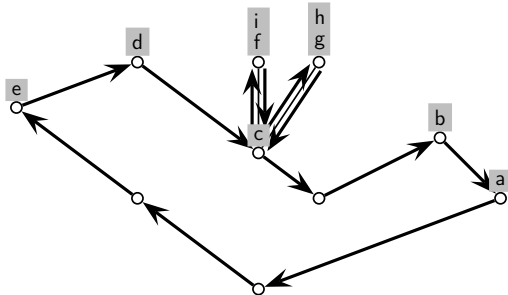
edM<sub>1</sub>c

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



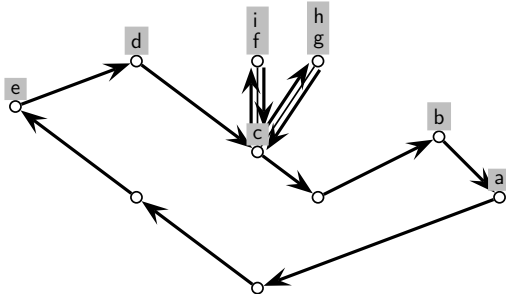
edM<sub>1</sub>cfi

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



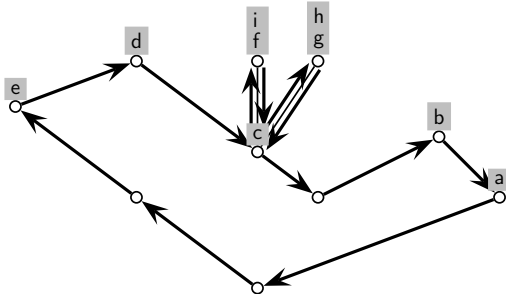
edM<sub>1</sub>cfiM<sub>2</sub>

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



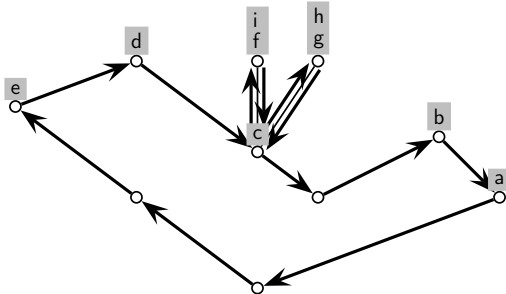
edM<sub>1</sub>cfiM<sub>2</sub>gh

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



$edM_1cfiM_2ghM_3$

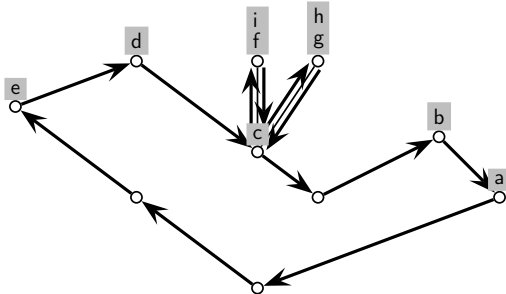
## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.



# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



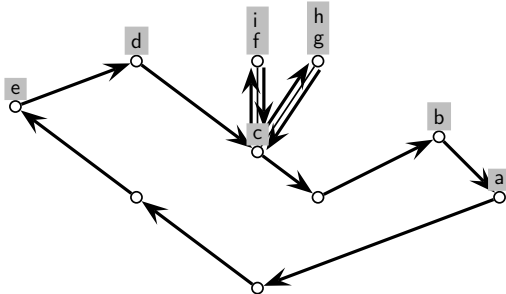
edM<sub>1</sub>cfiM<sub>2</sub>ghM<sub>3</sub>b

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



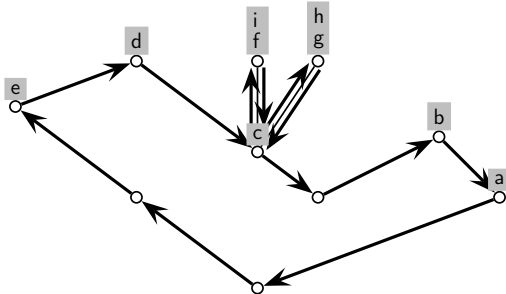
$edM_1cfiM_2ghM_3bM_4a$

## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

# S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

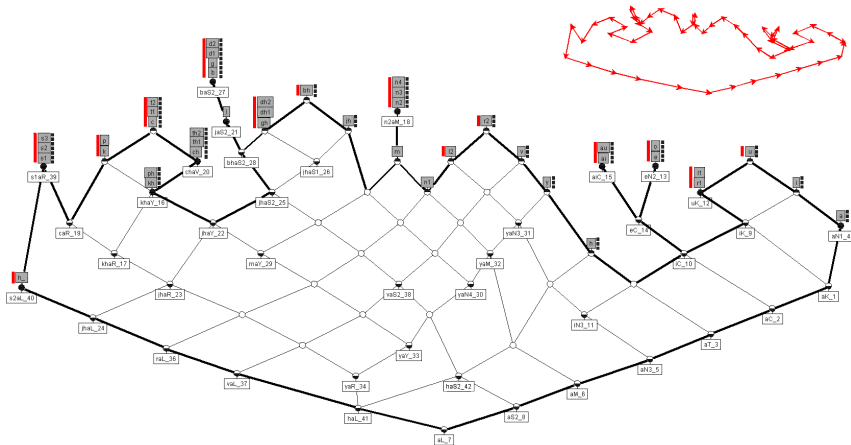


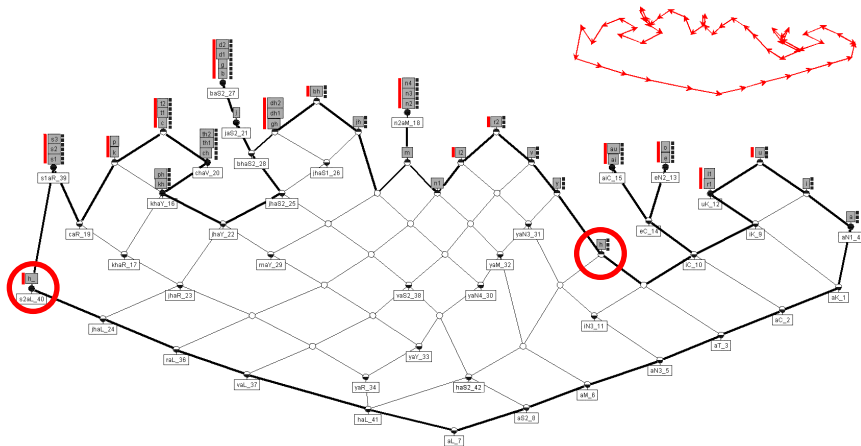
$edM_1cfiM_2ghM_3bM_4aM_5$

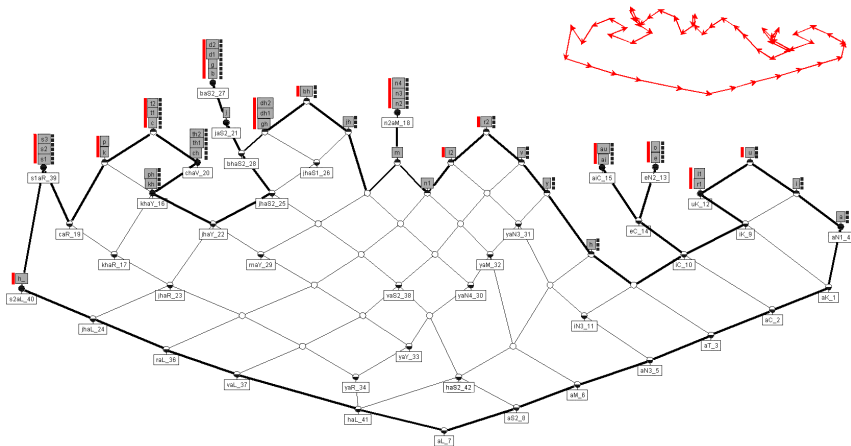
## Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- **Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an**, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

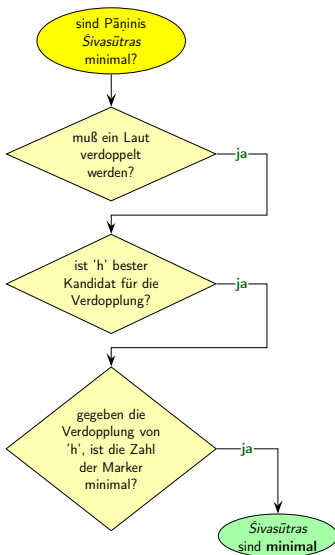
Erweiterter *Pratyāhāra*-Begriffsverband

Erweiterter *Pratyāhāra*-Begriffsverband

Erweiterter *Pratyāhāra*-Begriffsverband

Pāṇini hat für die *Śivasūtras* eine von nahezu 12 Millionen minimalen Anordnungen gewählt!

# Flußdiagramm



# Fazit

## Ergebnisse

- Pāṇinis *Śivasūtras*:
  - Pāṇinis *Śivasūtras* sind minimal
  - mathematischer Beweis
- allgemeine S-Darstellbarkeit:
  - vollständige Charakterisierung
  - 3 äquivalente, hinreichende Bedingungen