Seminar: Formale Begriffsanalyse bereinigte und reduzierte Kontexte Merkmalsimplikationen

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de

http://user.phil-fak.uni-duesseldorf.de/~petersen/Form_Begr/Form_Begr.html

23. Mai 2006

Proposition 3. *Jeder formale Begriff (A,B) eines formalen Kontextes (G, M, I) ist das Supremum der Gegenstandsbegriffe seines Umfangs*

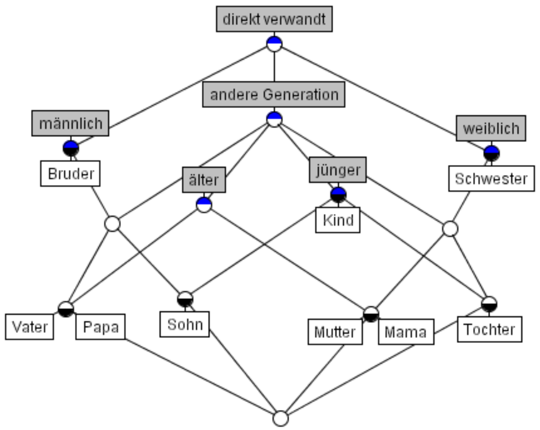
$$(A, B) = \bigvee_{g \in A} (g'', g')$$

und das Infimum der Merkmalbegriffe seines Inhalts

$$(A, B) = \bigwedge_{m \in B} (m', m'') .$$

kleiner Verwandtschaftskontext

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Kind	×		×			×
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Papa	×	×		×		×
Mama	×	×			×	×



Betrachte: γVater $\vee$ γTochter und μjünger $\wedge$ μälter

bereinigte Kontexte

Definition 4. *Ein Kontext (G, M, I) heißt* **bereinigt**, *wenn für beliebige Gegenstände $g, h \in G$ aus $g' = h'$ stets $g = h$ folgt und wenn für beliebige Merkmale $m, n \in M$ aus $m' = n'$ stets $m = n$ folgt.*

Bemerkung: Man bereinigt einen Kontext, indem man alle Zeilen streicht, deren Kreuzteil identisch zu einer anderen Zeile ist; das gleiche macht man mit allen "doppelt´´ vorkommenden Spalten.

Der Begriffsverband des bereinigten Kontextes ist strukturgleich zu dem des Ursprungskontexts.

irreduzible Elemente eines Verbands

Bemerkung: Ein Element eines Verbands heißt $\bigvee$-irreduzibel, wenn es *nicht* das Supremum einer Menge von echt kleineren Elementen ist.

Ein Element eines Verbands heißt $\bigwedge$-irreduzibel, wenn es *nicht* das Infimum einer Menge von echt größeren Elementen ist.

reduzierte Kontexte

Definition 5. *Ein bereinigter Kontext (G, M, I) heißt* ***zeilenreduziert****, wenn jeder Gegenstandsbegriff $\bigvee$-irreduzibel ist, und* ***spaltenreduziert****, wenn jeder Merkmalsbegriff $\bigwedge$-irreduzibel ist. Ein Kontext der sowohl zeilen- als auch spaltenreduziert ist, ist* ***reduziert****.*

Bemerkung: Man reduziert einen Kontext (G, M, I), indem man alle Gegenstände streicht, deren Begriffe im Begriffsverband nicht genau einen unteren Nachbarn haben und indem man alle Merkmale streicht, deren Begriffe im Begriffsverband nicht genau einen oberen Nachbarn haben.

Der Begriffsverband des reduzierten Kontextes ist strukturgleich zu dem des Ursprungskontextes.

Aufgaben

1. Warum genügt es im Begriffsverband die Gegenstands- und Merkmalbegriffe zu beschriften? Warum kann man aus diesen die Begriffsinhalte und -umfänge ablesen?

2. Warum sind gerade die Gegenstände, deren Gegenstandsbegriffe mehr als einen unteren Nachbarn im Begriffsverband haben, reduzibel?

Alle Begriffe eines Kontextes: lektische Ordnung

Definition 6. *Sei $G = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und seien $A, B \subseteq G$. Dann heißt A* ***lektisch kleiner*** *als B, falls das kleinste Element, in dem sich A und B unterscheiden zu B gehört. Anders ausgedrückt:*

$A < B$ g.d.w. $\exists i \in B \backslash A : A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}$

. Definiere weiterhin:

$A <_i B$ g.d.w. $i \in B \backslash A$ und $A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}$

$$A \oplus i \stackrel{\text{def}}{=} ((A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} \cup \{i\})''$$

Eigenschaften der lektischen Ordnung

Lemma 7. *Seien A, B und i wie in der vorangegangen Definition, dann gilt:*

1. $A < B \Leftrightarrow A <_i B$ *für ein* $i \in G$.
2. $A <_i B$ *und* $A <_j C$ *mit* $i < j$:$C <_i B$.
3. $i \notin A$:$A < A \oplus i$.
4. $A <_i B$ *und* B *Begriffsumfang* :$A \oplus i \subseteq B$, *d.h.* $A \oplus i \leq B$.
5. $A <_i B$ *und* B *Begriffsumfang* :$A <_i A \oplus i$.

Proposition 8. *Der kleinste Begriffsumfang, der bezüglich der lektischen Ordnung größer ist als eine gegebene Menge* $A \subset G$, *ist* $A \oplus i$, *wobei* i *das größte Element von* G *ist mit* $A <_i A \oplus i$.

Algorithmus zur Bestimmung aller Begriffsinhalte eines Kontextes

1. Der lektisch kleinste Begriffsinhalt ist $\emptyset''$.
2. Ist A als Begriffsinhalt bestimmt, so findet man den lektisch nächsten Begriffsinhalt, indem man alle Merkmale $i \in M \setminus A$ prüft, beginnend mit dem größten, und dann in absteigender Reihenfolge, bis erstmals $A <_i (A \oplus i)''$ gilt. $(A \oplus i)''$ ist dann der nächste Begriffsinhalt.
3. Wenn $(A \oplus i)'' = M$ dann bist du fertig, wenn nicht, dann verwende $(A \oplus i)''$ als neues A und mache bei (2) weiter.

Beispiel

	fliegen (1)	schwimmen (2)	groß (3)	ziehen (4)
Storch	×		×	×
Ente	×	×		×
Spatz	×			

A	i	$A \oplus i$	$(A \oplus i)''$	$A <_i (A \oplus i)''$	neuer Inhalt

Implikationen zwischen Merkmalen

Definition 9. *Sei (G, M, I) ein formaler Kontext. Eine* Implikation zwischen Merkmalen *(in M) — kurz eine* **Merkmalsimplikation** *— ist ein Paar von Teilmengen der Merkmalmenge M; bezeichnet wird eine solche Implikation mit $A \to B$.*

Terminologie

Definition 10. *Eine Teilmenge $T \subseteq M$ **respektiert** eine Implikation $A \to B$, wenn $A \not\subseteq T$ oder $B \subseteq T$ ist. T respektiert eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen, wenn T jede einzelne Implikation in $\mathcal{L}$ respektiert.*

*Eine Merkmalsimplikation $A \to B$ **gilt** in einem formalen Kontext (G, M, I), wenn $A, B \subseteq M$ und wenn jeder Gegenstandsinhalt die Implikation respektiert. Wir sagen dann auch, $A \to B$ ist eine **Implikation des Kontextes** (G, M, I) oder, gleichbedeutend, im Kontext (G, M, I) ist A eine **Prämisse** für B. B wird dann auch die **Konklusion** der Implikation $A \to B$ genannt.*

abgeschlossene und vollständige Implikationenfamilien

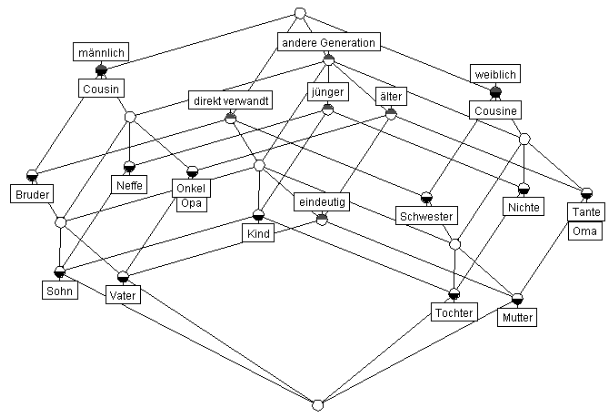
Definition 11. *Eine Implikation $A \to B$ **folgt (semantisch)** aus einer Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen zwischen Merkmalen in M, falls jede Teilmenge von M, die $\mathcal{L}$ respektiert, auch $A \to B$ respektiert. Eine Implikationenfamilie $\mathcal{L}$ wird **abgeschlossen** genannt, wenn jede Implikation, die aus $\mathcal{L}$ folgt, schon zu $\mathcal{L}$ gehört.*

*Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) heißt **vollständig**, wenn jede Implikation von (G, M, I) aus $\mathcal{L}$ folgt.*

Basis der Merkmalsimplikationen

Definition 12. *Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) heißt **nichtredundant**, wenn keine der Implikationen aus den übrigen folgt.*

*Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes (G, M, I), die nichtredundant und vollständig ist, heißt **Basis der Merkmalsimplikationen**.*



$$\{\text{eindeutig}\} \to \{\text{direkt verwandt, älter}\} \quad (1)$$
$$\{\text{direkt verwandt, älter}\} \to \{\text{eindeutig}\} \quad (2)$$
$$\{\text{jünger}\} \to \{\text{andere Generation}\} \quad (3)$$
$$\{\text{älter}\} \to \{\text{andere Generation}\} \quad (4)$$
$$\{\text{älter, jünger}\} \to \{\text{männlich, weiblich, eindeutig}\} \quad (5)$$
$$\{\text{männlich, weiblich}\} \to \{\text{älter, jünger, eindeutig}\} \quad (6)$$