Seminar: Formale Begriffsanalyse
Begriffsordnung und Begriffsverbände

2. Mai 2006

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de

http://user.phil-fak.uni-duesseldorf.de/~petersen/Form_Begr/Form_Begr.html

Ordnungsrelationen: Fortsetzung

Definition 1 *Sei $(M, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge und K eine Teilmenge von M. Ein Element x von M ist*

- *eine **obere Schranke** von K, g.d.w. $\forall y \in K : y \leq x$;*
- *eine **untere Schranke** von K, g.d.w. $\forall y \in K : x \leq y$.*

*x heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von K relativ zu M, wenn x eine obere Schranke ist und es keine obere Schranke y von K gibt mit $y \leq x$ und $x \neq y$. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese $\vee$ als '**join**').*

*x heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von K relativ zu M, wenn x eine untere Schranke ist und es keine untere Schranke y von K gibt mit $x \leq y$ und $x \neq y$. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese $\wedge$ als '**meet**').*

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Beispiele:

1. Für die linear geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: $\sup[1,4] = 4$ und $\inf[1,4] = 1$.
2. Für die partiell geordnete Menge $(\wp(M), \subseteq)$ mit $M = \{1,2,3,4\}$ ist das Supremum von $K = \big\{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\big\}$ die Vereinigung aller Elemente von K, also $\sup K = \{1,2,4\}$.
   Das Infimum von K ist der Durchschnitt aller Elemente von K, also $\inf K = \emptyset$.

Aufgaben:

1. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge

$$M = \Big(\big\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{1,2,3\},$$
$$\{1,3\},\{2,4\},\{1,5\},\{1,\},\{3\},\{4\},\{5\},\emptyset\big\},\subseteq\Big).$$

2. Wähle drei 4-elementige Teilmengen von M und bestimme ihr Supremum und Infimum.

Verbandstheorie

Definition 2 (Verbände) *Eine geordnete Menge $\mathcal{V} = (V, \leq)$ ist ein* ***Verband****, g.d.w. zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y $(x \vee y)$ und das Infimum von x und y $(x \wedge y)$ Elemente von V sind.*

Definition 3 *Ein Verband $\mathcal{V} = (V, \leq)$ ist ein* ***vollständiger Verband****, falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daß $\bigvee K \in V$ und $\bigwedge K \in V$. Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\bigvee V$, das* ***Einselement*** *($\mathbf{1_V}$) genannt, und ein kleinstes Element $\bigwedge V$, das* ***Nullement*** *($\mathbf{0_V}$) genannt. Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die* ***Atome*** *und die unteren Nachbarn des Einselements die* ***Koatome*** *des Verbands.*

Bemerkung:

- Jeder endliche Verband ist vollständig.
- Da $\bigwedge \emptyset = 1_V$ und $\bigvee \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge V.
- Die Ordnungsrelation kann aus $\wedge$ und $\vee$ wiedergewonnen werden:
  $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x = x \wedge y \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y$
- $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Beispiele:

1. $(\wp(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband, $\vee$ entspricht $\cup$ und $\wedge$ entspricht $\cap$.
2. $([2,5], \leq)$ ist ein vollständiger Verband.
3. $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein Verband, aber nicht vollständig.
4. $\Big(\big\{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\big\}, \subseteq\Big)$ ist kein Verband.

Begriffsverbände

Definition 4 *Seien (A_1, B_1) und (A_2, B_2) zwei Begriffe eines formalen Kontextes mit $A_1 \subseteq A_2$ (äquivalent: $B_2 \subseteq B_1$), dann ist (A_1, B_1) ein* ***Unterbegriff*** *von (A_2, B_2) und (A_2, B_2) ein* ***Oberbegriff*** *von (A_1, B_1). Man schreibt $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ und nennt die Ordnung $\leq$ die* ***Begriffsordnung****.*

Theorem 5 (Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse) *Für jeden formalen Kontext (G, M, I) bildet die assoziierte geordnete Menge $(\mathcal{B}(G, M, I), \leq)$ einen vollständigen Verband, der der* ***Begriffsverband*** *des formalen Kontextes genannt wird. In dem Begriffsverband sind Infimum und Supremum wie folgt beschrieben:*

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'' \right)$$

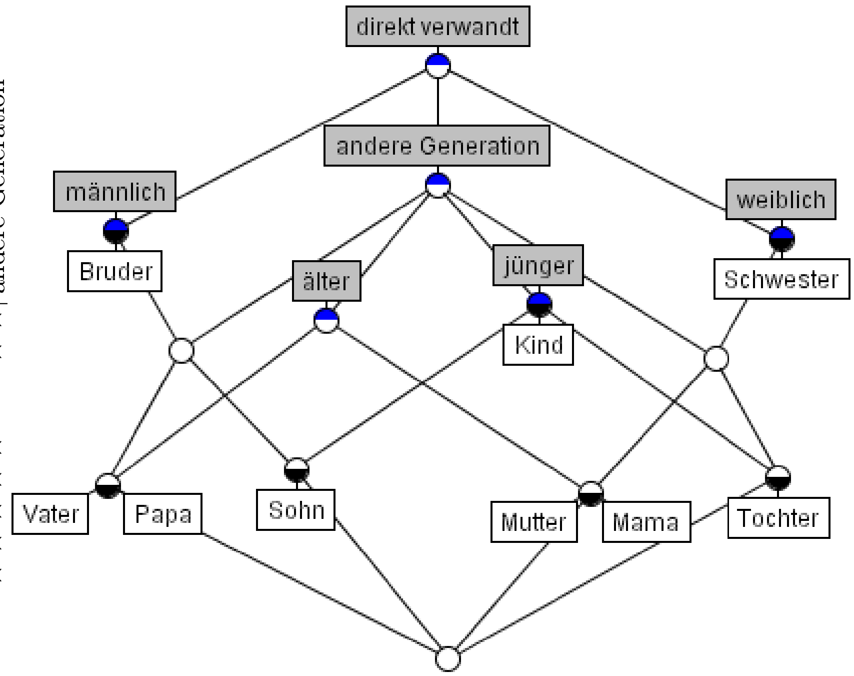
$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'', \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

Jeder vollständige Verband ist ein Begriffsverband.

Aufgaben:

1. Kleiner Beispielkontext der Verwandtschaftsterme:

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Kind	×		×			×
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Papa	×	×		×		×
Mama	×	×			×	×



	Extension									Intension					
	Vater	Mutter	Bruder	Schwester	Kind	Sohn	Tochter	Papa	Mama	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
B1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					
B2		×		×			×		×	×				×	
B3	×		×			×		×		×			×		
B4	×	×			×	×	×	×	×	×					×
B5	×	×						×	×	×	×				×
B6					×	×	×			×		×			×
B7		×					×		×	×				×	×
B8	×					×		×		×			×		×
B9	×							×		×	×		×		×
B10		×							×	×	×			×	×
B11						×				×		×	×		×
B12							×			×		×		×	×
B13										×	×	×	×	×	×

(a) Nach welchem Verfahren ist der Begriffsverband beschriftet?

(b) Trage die Begriffsnummern aus der Begriffstabelle in das Diagramm ein.

(c) Was könnten die unterschiedlichen Knotenarten des Diagramms bedeuten?

2. Wie ändert sich der Begriffsverband, wenn man

    (a) das Merkmal 'älter' wegläßt?

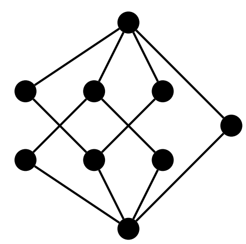
    (b) den Gegenstand 'Papa' wegläßt?

    (c) den Gegenstand 'Kind' wegläßt?

    (d) das Merkmal 'gleiche Generation' hinzunimmt?

    (e) den Gegenstand 'ältere Schwester' hinzunimmt?

3. Ermittle einen möglichst "kleinen" (kleine Menge von Gegenständen und Merkmalen, kleine Inzidenzrelation) Kontext, der folgenden vollständigen Verband als Begriffsverband hat.



4. Beweise, daß die Menge aller Begriffe eines endlichen Kontextes (ein Kontext mit endlicher Merkmal- und Gegenstandsmenge) geordnet bezüglich der Begriffsordnung einen vollständigen Verband bildet.

5. Beschreibe ein systematisches Verfahren, wie man (möglichst effizient) die Menge aller Begriffe zu einem Kontext ermitteln kann.
