

# **Seminar: Formale Begriffsanalyse**

## **Formale Kontexte und Begriffsverbände**

Dozentin: Wiebke Petersen  
petersew@uni-duesseldorf.de

25. April 2006

# Merkmalanalyse deutscher Verwandtschaftsterme

angelehnt an Bierwisch 1969, Seite 67

	direkt verwandt	älter	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	+	+	-	+	+
Mutter	+	+	+	+	+
Bruder	+	0	-	-	-
Schwester	+	0	+	-	-
Kind	+	-	0	-	+
Sohn	+	-	-	-	+
Tochter	+	-	+	-	+
Onkel	-	+	-	-	+
Tante	-	+	+	-	+
Opa	-	+	-	-	+
Oma	-	+	+	-	+
Cousin	-	0	-	-	-
Cousine	-	0	+	-	-
Neffe	-	-	-	-	+
Nichte	-	-	+	-	+

+: trifft zu

-: trifft nicht zu

0: indifferent in bezug auf  
das Merkmal

# Formaler Kontext

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

**Definition 1.** Ein formaler Kontext  $K$  ist ein Tripel  $(G, M, I)$ , bestehend aus einer Menge von Gegenständen  $G$ , einer Menge von Merkmalen  $M$  und einer binären Inzidenzrelation  $I \subseteq G \times M$ ; wobei  $(g, m) \in I$  gelesen wird als “der formale Gegenstand  $g$  hat das formale Merkmal  $m$ ” oder “das formale Merkmal  $m$  trifft auf den formalen Gegenstand  $g$  zu”.

# Die Ableitungsrelation

**Definition 2.** *Es sei  $K = (G, M, I)$  ein formaler Kontext. Für eine Menge  $A \subseteq G$  von Gegenständen definieren wir*

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid \forall g \in A : (g, m) \in I\}$$

*( $A'$  ist die Menge der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände in  $A$ ).*

*Entsprechend ist für eine Menge  $B \subseteq M$  von Merkmalen*

$$B' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall m \in B : (g, m) \in I\}$$

*definiert ( $B'$  ist die Menge der Gegenstände, die alle Merkmale aus  $B$  haben).*

# Veranschaulichung der Ableitungsrelation

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
<b>Onkel</b>		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
<b>Neffe</b>			×	×			×
Nichte			×		×		×

$A = \{\text{Neffe, Onkel}\}$

# Veranschaulichung der Ableitungsrelation

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

$$\begin{aligned}
 A' &= \{\text{Neffe, Onkel}\}' \\
 &= \{\text{männlich, andere Generation}\}
 \end{aligned}$$

# Veranschaulichung der Ableitungsrelation

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

$$A'' = \{\text{Neffe, Onkel}\}''$$

$$= \{\text{männlich, andere Generation}\}'$$

$$= \{\text{Vater, Sohn, Onkel, Opa, Neffe}\}$$

# Veranschaulichung der Ableitungsrelation

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

$(G, M, I)$  formaler Kontext

$A, A_1, A_2 \subseteq G$  Mengen von Gegenständen

$B, B_1, B_2 \subseteq M$  Mengen von Merkmalen

1) wenn  $A_1 \subseteq A_2$ , dann  $A'_2 \subseteq A'_1$

1') wenn  $B_1 \subseteq B_2$ , dann  $B'_2 \subseteq B'_1$

2)  $A \subseteq A''$

2')  $B \subseteq B''$

3)  $A' = A'''$

3')  $B' = B'''$



# formaler Begriff

**Definition 3.** Sei  $K = (G, M, I)$  ein formaler Kontext; ein **formaler Begriff** ist ein Paar  $(A, B) \subseteq G \times M$ , mit  $A = B'$  und  $B = A'$ .

$A$  heißt die **Extension** bzw. der **Umfang** und  $B$  die **Intension** bzw. der **Inhalt** des Begriffs  $(A, B)$ .

$\mathcal{B}(G, M, I)$  bezeichnet die Menge aller formalen Begriffe des Kontextes  $(G, M, I)$ .

# formaler Begriff

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

({Vater, Sohn, Onkel, Opa, Neffe},  
 {männlich, andere Generation})

ist ein formaler Begriff des Kontextes der  
 Verwandtschaftsbeziehungen.

Umfang: {Vater, Sohn, Onkel, Opa, Neffe}

Inhalt: {männlich, andere Generation}

# Gegenstands- und Merkmalsbegriffe

**Definition 4.** Für einen Gegenstand  $g \in G$  schreiben wir  $g'$  statt  $\{g\}'$  für den **Gegenstandsinhalt**.

Für ein Merkmal  $m \in M$  schreiben wir  $m'$  statt  $\{m\}'$  für den **Merkmalsumfang**.

Ferner schreiben wir  $\gamma g$  für den **Gegenstandsbegriff**  $(g'', g')$  und  $\mu m$  für den **Merkmalsbegriff**  $(m', m'')$ .

# Gegenstands- und Merkmalsbegriffe

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
<b>Onkel</b>		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

Onkel' = {älter, männlich, andere Generation}

# Gegenstands- und Merkmalsbegriffe

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

Onkel'' = {Vater, Onkel, Opa}

Der Gegenstandsbegriff von Onkel ist

$\mu$ Onkel =

({Vater, Onkel, Opa},  
{älter, männlich, andere Generation})

# Eigenschaften formaler Kontexte und Begriffe

**Lemma 5.** *Jeder formale Begriff eines Kontextes  $(G, M, I)$  ist von der Form  $(X'', X')$  für eine Teilmenge  $X \subseteq G$  und von der Form  $(Y', Y'')$  für eine Teilmenge  $Y \subseteq M$ . Umgekehrt ist jedes solche Paar ein formaler Begriff.*

*Jeder Begriffsumfang ist Durchschnitt von Merkmalsumfängen und jeder Begriffsinhalt ist Durchschnitt von Gegenstandsinhalten.*

# Übungsaufgabe

Ein **Hüllenoperator** auf einer Menge  $H$  ist eine Abbildung  $\phi : H \rightarrow H$ , die jeder Teilmenge  $X \subseteq H$  eine **Hülle**  $\phi(X)$  zuordnet und dabei folgende Bedingungen erfüllt:

1. wenn  $X \subseteq Y$ , dann  $\phi(X) \subseteq \phi(Y)$  (Monotonie)
2.  $X \subseteq \phi(X)$  (Extensivität)
3.  $\phi(\phi(X)) = \phi(X)$  (Idempotenz)

Zeige, dass sowohl  $'' : G \rightarrow G$  als auch  $'' : M \rightarrow M$  ein Hüllenoperator ist.

# Übungsaufgabe: Verwandtschaftskontext

	Extension						Intension								
	Vater	Mutter	Bruder	Schwester	Kind	Sohn	Tochter	Papa	Mama	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×													
Mutter	×	×													
Bruder	×		×												
Schwester	×			×											
Kind	×		×		×										
Sohn	×		×		×										
Tochter	×		×		×										
Papa	×	×													
Mama	×	×													
B1															
B2															
B3															
B4															
B5															
B6															
B7															
B8															
B9															
B10															
B11															
B12															
B13															

Tragen sie die Menge aller Begriffe zu dem Beispielkontext “Verwandtschaft” in die rechte Tabelle ein.



# binäre Relation

**Definition 6.** Eine **binäre Relation**  $R$  zwischen zwei Mengen  $M$  und  $N$  ist eine Menge von Paaren  $(m, n)$  mit  $m \in M$  und  $n \in N$ , also  $R \subseteq M \times N$ .

Statt  $(m, n) \in R$  schreibt man auch  $mRn$ .

Ist  $M = N$ , so ist  $R$  eine **binäre Relation auf der Menge**  $M$ .

$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \mid (m, n) \in R\}$  ist die zu  $R$  **inverse Relation**.

# besondere binäre Relationen

**Definition 7.** Eine binäre Relation  $R$  auf  $M$  heißt:

**reflexiv** g.d.w.  $\forall x \in M : xRx$ ,

**irreflexiv** g.d.w.  $\forall x \in M : \neg xRx$ ,

**symmetrisch** g.d.w.  $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy, \text{ dann } yRx$ ,

**asymmetrisch** g.d.w.  $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy, \text{ dann } \neg yRx$ ,

**antisymmetrisch** g.d.w.  $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy \text{ und } x \neq y, \text{ dann } \neg yRx$ ,

**konnex / linear** g.d.w.  $\forall x, y \in M : xRy \text{ oder } yRx \text{ oder } x = y$ ,

**transitiv** g.d.w.  $\forall x, y, z \in M : \text{wenn } xRy \text{ und } yRz, \text{ dann } xRz$ .

# Äquivalenzrelation

**Definition 8.** Eine binäre Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine **Äquivalenzrelation**, falls  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  und  $a, b \in M$ , so schreibt man statt  $aRb$  auch  $a \sim_R b$  und sagt:  $a$  ist äquivalent zu  $b$  bezüglich  $R$ .

Man kann die Elemente von  $M$  in Klassen äquivalenter Elemente einteilen; für ein Element  $a \in M$  heißt die Klasse

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{b : b \in M \text{ und } a \sim_R b\}$$

die **Äquivalenzklasse** von  $a$  bezüglich  $R$ . Die Menge

$$M/R \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_R : a \in M\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus  $M$  bezüglich  $R$  heißt **Quotient** von  $M$  bezüglich  $R$ .

# Eigenschaften der Äquivalenzrelation

**Bemerkung:** Seien  $a$  und  $b$  Elemente einer Menge  $M$  und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , dann gilt:

$$[a]_R \neq \emptyset, \quad [a]_R = [b]_R \text{ g.d.w. } a \sim_R b, \quad a \not\sim b \text{ g.d.w. } [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

# Ordnungsrelationen

**Definition 9.** *Eine binäre Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine*

**Quasiordnung/Präordnung,** *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*

**partielle Ordnung,** *wenn  $R$  transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*

**lineare Ordnung,** *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*

*$(M, R)$  heißt partiell/linear ... geordnete Menge.*

**Bemerkung:** Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit  $\leq$ , bzw. partielle Ordnungsrelationen mit  $\subseteq$  bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

# Ordnungsrelationen

**Definition 10.** *Eine binäre Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine*

**Quasiordnung/Präordnung,** *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*

*(Beispiel: in derselben Schulklasse sein; Äquivalenzrelationen)*

**partielle Ordnung,** *wenn  $R$  transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*

*(Beispiel:  $(\wp(M), \subseteq)$ )*

**lineare Ordnung,** *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*

*(Beispiel:  $(\mathbb{N}, \leq)$ )*

*$(M, R)$  heißt partiell/linear ... geordnete Menge.*

**Bemerkung:** Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit  $\leq$ , bzw. partielle Ordnungsrelationen mit  $\subseteq$  bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

# strikte Ordnungen

**Definition 11.** *Eine binäre Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine*

**strikte partielle Ordnung**, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*

**totale / strikt lineare Ordnung**, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*

**Bemerkung:** Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit  $<$ , bzw. mit  $\subset$  bezeichnet.

# strikte Ordnungen

**Definition 12.** *Eine binäre Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine*

**strikte partielle Ordnung,** *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*

*(Beispiel:  $(\wp(M), \subset)$ )*

**totale / strikt lineare Ordnung,** *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*

*(Beispiel:  $(\wp(M), <)$ )*

**Bemerkung:** Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit  $<$ , bzw. mit  $\subset$  bezeichnet.

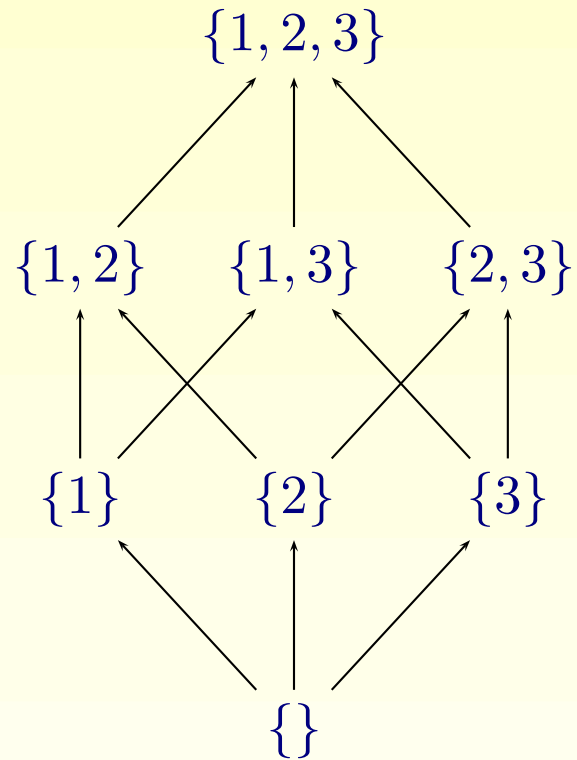


# Nachbar / Hassediagramm

**Definition 13.** Seien  $a$  und  $b$  zwei Elemente einer geordneten Menge  $(M, \subseteq)$ ,  $b$  heißt **oberer Nachbar** von  $a$  g.d.w.  $a \subseteq b$  und  $a \neq b$  und wenn es kein von  $a$  und  $b$  verschiedenes Element  $c$  von  $M$  gibt, für das  $a \subseteq c \subseteq b$  gilt. Man schreibt dann auch  $a \prec b$ .

**Bemerkung:** Jede Ordnung  $\subseteq$  auf einer Menge  $M$  legt eine natürliche Äquivalenzrelation '=' auf  $M$  fest:  $\forall a, b \in M : a = b \Leftrightarrow a \subseteq b$  und  $b \subseteq a$ . Eine endliche geordnete Mengen  $(M, \subseteq)$  kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jede =-Äquivalenzklasse von  $M$  einen Punkt zeichnet und zwar so, daß  $[a]$  unterhalb von  $[b]$  liegt, wenn  $[a] \subseteq [b]$ . Zwei Punkte  $[a]$  und  $[b]$  werden mit einer Linie verbunden, wenn  $a \prec b$ .

Die Abbildung zeigt das Hasse-Diagramm zu  $\wp(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$ :



# Übungsaufgaben

1. Stelle möglichst viele (mindestens zwei) Sätze über Relationen auf und beweise sie.

Bsp.: Jede transitive Relation, die symmetrisch ist, ist reflexiv.

2. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge

$M = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, \}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$  und bestimme die Weite und Länge von  $M$ .