

Seminar: Formale Begriffsanalyse

Seminarplan

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de

18. April 2006

Seminarplan

1. Einige Anwendungsbeispiele zur Motivation
2. Formale Kontexte und formale Begriffe
 - Grundlagen der Mengenlehre, Eigenschaften von Relationen
3. Begriffsverbände
 - Grundlagen der Ordnungs- und Verbandstheorie
 - Hüllensystem
4. Zeichnen von Begriffsverbänden
 - bereinigte und reduzierte Kontexte
 - additive Liniendiagramme
 - gestufte Liniendiagramme

5. Algorithmen zur Berechnung der formalen Begriffe

- naive Methode
- next-concept-Algorithums

6. Mehrwertige Kontexte und Skalierung

- schlichte Skalierung
- Nominalskalen
- Ordinalskalen
- Interordinalskalen
- Biordinalskalen
- dichotome Skala

7. Implikationen

- einige Begriffe aus der Aussagenlogik
- Berechnung der Stammbasis

8. Wenn die Resultate der FBA zu genau sind:

- Pruning der Begriffsverbände — Eisbergverbände
- Assoziationsregeln

9. Wissensakquisition mit FBA

- Merkmalsexploration

Kurzeinführung in die formale Begriffsanalyse

Folien von Gerd Stumme
FG Wissensverarbeitung
Universität Kassel

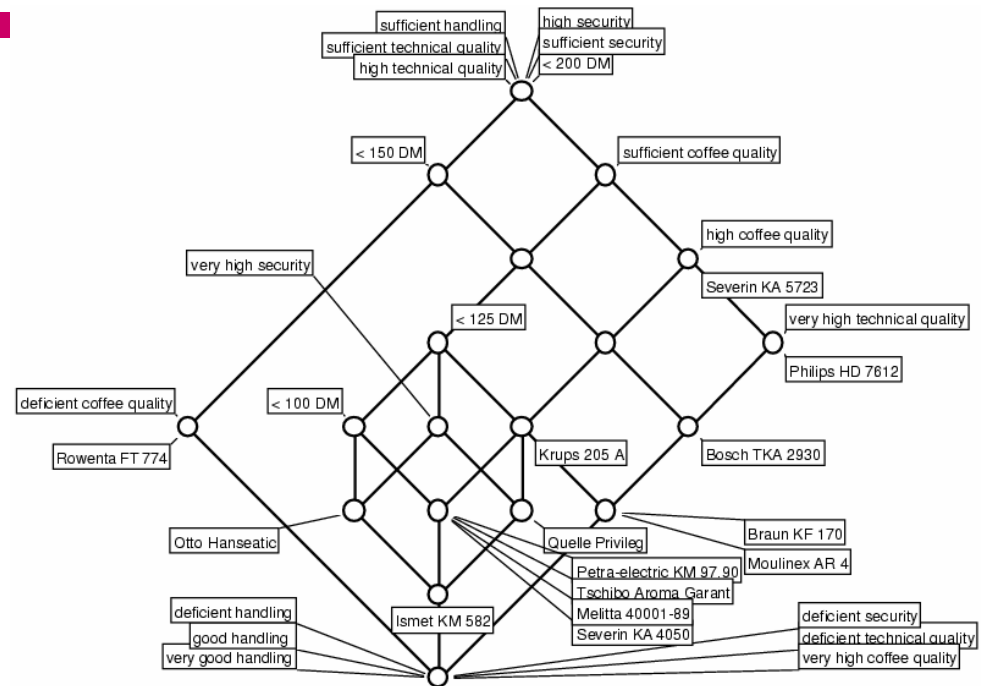
Formale Begriffsanalyse ist um 1980 in Darmstadt entstanden als mathematische Theorie, die eine Formalisierung des Begriffs vom „Begriff“ liefert.

FBA hat seitdem zunehmend Verbreitung in der Informatik gefunden, u.a. in

- der Datenanalyse,
- der Wissensentdeckung,
- dem Software Engineering.

Ausgehend von Datensätzen leitet FBA Begriffshierarchien ab.

FBA bietet die Erzeugung und Visualisierung der Begriffshierarchien auf einer mathematisch fundierten Basis.



STIFTUNG WARENTEST		KAFFEE- MASCHINEN MIT WARM- HALTEKANNE (8 bis 10 Tassen)					test
test		KOMPASS					test Ausgabe 12/98
	Mittlerer Preis in DM ca.	Preis für Ersatzkanne/ Glaseinsatz in DM ca.	Kaffee- qualität	Tech- nische Prü- fung	Sicher- heit	Hand- ha- bung	test- Qualitätsurteil
Gewichtung			35 %	30 %	10 %	25 %	
Neckermann Best.-Nr. 8628/409	40,-	35,- ¹⁾ / □	baugl. mit Otto Hanseatic Best.-Nr. 4327357				zufriedenst.
Otto Hanseatic Best.-Nr. 4327357	40,-	30,- ²⁾ / □	○	+	++	○	zufriedenst.
Quelle Privileg Best.-Nr. 7030720	40,-	24,50 / 17,50	baugl. mit Otto Hanseatic Best.-Nr. 4327357				zufriedenst.
Severin KA 9660	50,-	35,- / 23,-	baugl. mit Otto Hanseatic Best.-Nr. 4327357				zufriedenst.
Severin KA 4050	80,-	50,- / □	+	+	+	○	gut
Tchibo Aroma Garant Art.-Nr. 48469	80,-	27,50 / 19,50	+	+	+	○	gut
Ismet KM 582 starlight	84,-	47,- / 14,-	+	+	++	○	gut

2.1 Basic Notions

Formale Begriffsanalyse

Def.: Ein **formaler Kontext** ist ein Tripel (G, M, I) , wobei

- G eine Menge von Gegenständen,
- M eine Menge von Merkmalen
- und I eine Relation zwischen G und M ist.
- $(g, m) \in I$ wird gelesen als „Gegenstand g hat Merkmal m “.

National Parks in California	NPS Guided Tours	Hiking	Horseback Riding	Swimming	Boating	Fishing	Bicycle Trail	Cross Country Trail
Cabrillo Natl. Mon.						×	×	
Channel Islands Natl. Park		×		×		×		
Death Valley Natl. Mon.	×	×	×	×			×	
Devils Postpile Natl. Mon.	×	×	×	×		×		
Fort Point Natl. Historic Site	×					×		
Golden Gate Natl. Recreation Area	×	×	×	×		×	×	
John Muir Natl. Historic Site	×							
Joshua Tree Natl. Mon.	×	×	×					
Kings Canyon Natl. Park	×	×	×			×		×
Lassen Volcanic Natl. Park	×	×	×	×	×	×		×
Lava Beds Natl. Mon.	×	×						
Muir Woods Natl. Mon.		×						
Pinnacles Natl. Mon.		×						
Point Reyes Natl. Seashore	×	×	×	×		×	×	
Redwood Natl. Park	×	×	×	×		×		
Santa Monica Mts. Natl. Recr. Area	×	×	×	×	×	×		
Sequoia Natl. Park	×	×	×			×		×
Whiskeytown-Shasta-Trinity Natl. Recr. Area	×	×	×	×	×	×		
Yosemite Natl. Park	×	×	×	×	×	×	×	×

2.1 Basic Notions

Für $A \subseteq G$ definieren wir

$$A' := \{ m \in M \mid \forall g \in A: (g, m) \in I \}.$$

Für $B \subseteq M$ definieren wir dual

$$B' := \{ g \in G \mid \forall m \in B: (g, m) \in I \}.$$

A

National Parks in California	A'							
	NPS Guided Tours	Hiking	Horseback Riding	Swimming	Boating	Fishing	Bicycle Trail	Cross Country Trail
Cabrillo Natl. Mon.						x	x	
Channel Islands Natl. Park		x		x		x		
Death Valley Natl. Mon.	x	x	x	x			x	
Devils Postpile Natl. Mon.	x	x	x	x		x		
Fort Point Natl. Historic Site	x					x		
Golden Gate Natl. Recreation Area	x	x	x	x		x	x	
John Muir Natl. Historic Site	x							
Joshua Tree Natl. Mon.	x	x	x					
Kings Canyon Natl. Park	x	x	x			x		x
Lassen Volcanic Natl. Park	x	x	x	x	x	x		x
Lava Beds Natl. Mon.	x	x						
Muir Woods Natl. Mon.		x						
Pinnacles Natl. Mon.		x						
Point Reyes Natl. Seashore	x	x	x	x		x	x	
Redwood Natl. Park	x	x	x	x		x		
Santa Monica Mts. Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Sequoia Natl. Park	x	x	x			x		x
Whiskeytown-Shasta-Trinity Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Yosemite Natl. Park	x	x	x	x	x	x	x	x

2.1 Basic Notions

Def.: Ein formaler Begriff

ist ein Paar (A, B) mit

- $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$,
- $A' = B$,
- $B' = A$.

A ist der **Umfang** und B der **Inhalt** des Begriffs.

Umfang

Inhalt

National Parks in California	Inhalt							
	NPS Guided Tours	Hiking	Horseback Riding	Swimming	Boating	Fishing	Bicycle Trail	Cross Country Trail
Cabrillo Natl. Mon.						x	x	
Channel Islands Natl. Park		x		x		x		
Death Valley Natl. Mon.	x	x	x	x			x	
Devils Postpile Natl. Mon.	x	x	x	x		x		
Fort Point Natl. Historic Site	x					x		
Golden Gate Natl. Recreation Area	x	x	x	x		x	x	
John Muir Natl. Historic Site	x							
Joshua Tree Natl. Mon.	x	x	x					
Kings Canyon Natl. Park	x	x	x			x		x
Lassen Volcanic Natl. Park	x	x	x	x	x	x		x
Lava Beds Natl. Mon.	x	x						
Muir Woods Natl. Mon.		x						
Pinnacles Natl. Mon.		x						
Point Reyes Natl. Seashore	x	x	x	x		x	x	
Redwood Natl. Park	x	x	x	x		x		
Santa Monica Mts. Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Sequoia Natl. Park	x	x	x			x		x
Whiskeytown-Shasta-Trinity Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Yosemite Natl. Park	x	x	x	x	x	x	x	x

2.1 Basic Notions

Der blaue Begriff ist ein **Unterbegriff** des gelben Begriffs, denn:

der blaue Umfang ist im gelben Umfang enthalten.

(\Leftrightarrow der gelbe Inhalt ist im blauen Inhalt enthalten.)

Def.: $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$

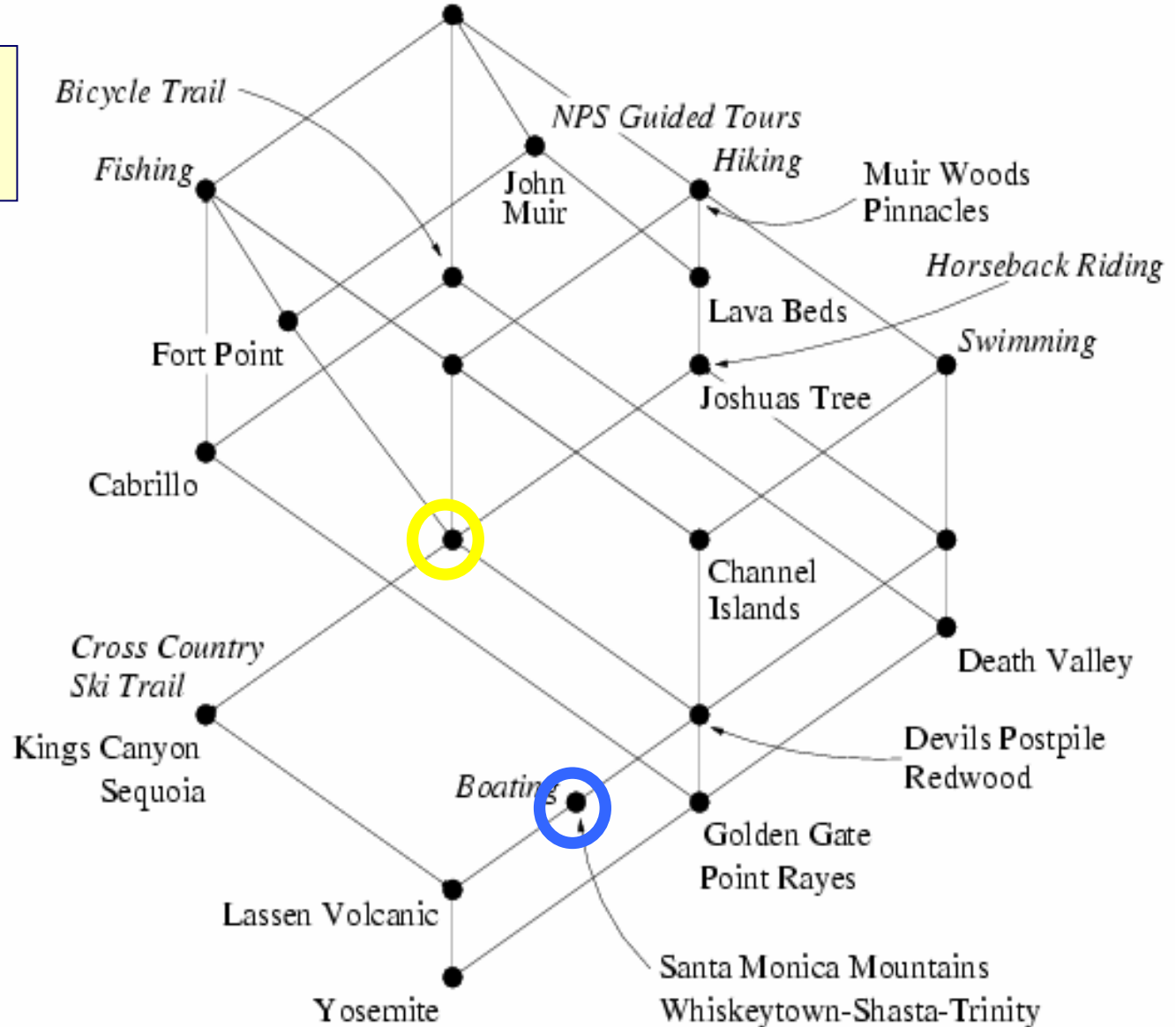
$\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2$

($\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2$)

National Parks in California	NPS Guided Tours	Hiking	Horseback Riding	Swimming	Boating	Fishing	Bicycle Trail	Cross Country Trail
Cabrillo Natl. Mon.						x	x	
Channel Islands Natl. Park		x		x		x		
Death Valley Natl. Mon.	x	x	x	x			x	
Devils Postpile Natl. Mon.	x	x	x	x		x		
Fort Point Natl. Historic Site	x					x		
Golden Gate Natl. Recreation Area	x	x	x	x		x	x	
John Muir Natl. Historic Site	x							
Joshua Tree Natl. Mon.	x	x	x					
Kings Canyon Natl. Park	x	x	x			x		x
Lassen Volcanic Natl. Park	x	x	x	x	x	x		x
Lava Beds Natl. Mon.	x	x						
Muir Woods Natl. Mon.		x						
Pinnacles Natl. Mon.		x						
Point Reyes Natl. Seashore	x	x	x	x		x	x	
Redwood Natl. Park	x	x	x	x		x		
Santa Monica Mts. Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Sequoia Natl. Park	x	x	x			x		x
Whiskeytown-Shasta-Trinity Natl. Recr. Area	x	x	x	x	x	x		
Yosemite Natl. Park	x	x	x	x	x	x	x	x

2.1 Basic Notions

Der **Begriffsverband** zu dem Nationalpark-Kontext



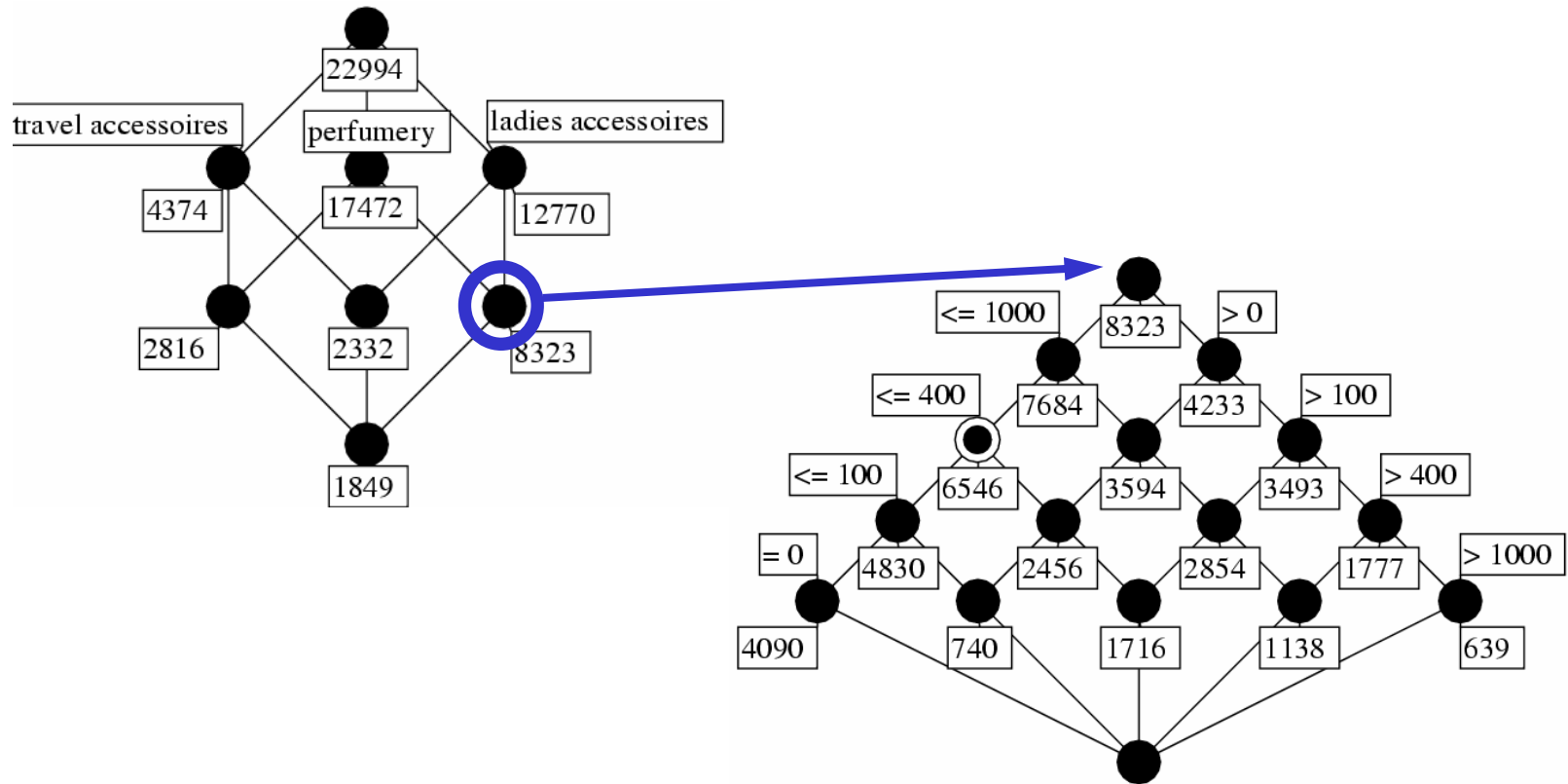
National Parks in California	NPS Guided Tours	Hiking	Horseback Riding	Swimming	Boating	Fishing	Bicycle Trail	Cross Country Trail
Cabrillo Natl. Mon.							x	x
Channel Islands Natl. Park								
Death Valley Natl. Mon.								
Devils Postpile Natl. Mon.	x	x	x	x				
Fort Point Natl. Historic Site								
Golden Gate Natl. Recreation Area	x	x	x	x				
John Muir Natl. Historic Site	x							
Joshua Tree Natl. Mon.		x	x					
Kings Canyon Natl. Park	x	x	x	x				
Lassen Volcanic Natl. Park	x	x	x	x				
Lava Beds Natl. Mon.	x	x						
Muir Woods Natl. Mon.			x					
Pinnacles Natl. Mon.								
Point Reyes Natl. Seashore	x	x	x	x				
Redwood Natl. Park	x	x	x	x				
Santa Monica Mts. Natl. Recr. Area	x	x	x	x				
Sequoia Natl. Park	x	x	x	x				
Whiskeytown-Shasta-Trinity Natl. Recr. Area	x	x	x	x				
Yosemite Natl. Park	x	x	x	x				

Anwendungsbeispiele der Formalen Begriffsanalyse

Folien von
Gerd Stumme
FG Wissensverarbeitung
Universität Kassel

Einige Anwendungen der Formalen Begriffsanalyse

- Database Marketing bei Jelmoli AG, Zürich



list of referees: ICCS-2000 - ICCS2000 - Netscape-Ordner

Datei Bearbeiten Ansicht Gehe Nachricht Communicator Hilfe

Nachr. abr. Neue Nachr. Antwort Antwort an alle Weiterleiten Ablegen Nächste Drucken Löschen Stop

Name	Ungelesen	Insgesamt
Drafts		
Templates		
Sent		1651
Trash	2	1639
AIFB		94
AUSTRALIA	???	
cole.richard		26
eklund.peter		73
groh.bernd	???	
martin.philippe	???	
CALLFORPAPERS		17
Conferences		1
ECAI02-Workshop		26
ECML01...orkshop	1	262
mailingaktion	???	
antworten	???	
lesenswert	???	
ICCS2000	1	187
CAMER~\$M.SUM	???	
CAMER~UR	???	
PositionPapers	???	
Software Demos	???	
Vortragende	???	
ICCS2001		333

Betreff	Absender	Datum	Priorität
final notification	Guy Mineau	25.05.2000 16:37	
ICCS2000	Janos Sarbo	26.05.2000 15:20	
Re: Returned mail: Host u...	Alex Borgida	26.05.2000 17:40	
status of all papers	Guy Mineau	29.05.2000 16:50	
expenses covered to go t...	Guy Mineau	29.05.2000 20:22	
Re: Cofirmation ICCS2000	Galia Angelova	30.05.2000 08:29	
additional reviewer for ICC...	Hary Delugach	30.05.2000 21:30	
list of referees: ICCS-2000	Guy Mineau	30.05.2000 21:32	
other referees: reminder	Guy Mineau	30.05.2000 21:59	
list of referees: ICCS...	Peter Eklund	31.05.2000 11:...	
Additional reviewers	Ulrike Sattler	31.05.2000 11:46	
Re: List of Referees	Pavel Kocura	31.05.2000 12:40	
Re: ICCS 2000	Deborah L. McGuinness	31.05.2000 20:38	
Please help with accomo...	Guy Mineau	31.05.2000 21:20	

Betreff: list of referees: ICCS-2000
Datum: Wed, 31 May 2000 11:01:11 +0200 (MEST)
Von: [Peter Eklund <Peter.Eklund@sophia.inria.fr>](mailto:Peter.Eklund@sophia.inria.fr)
An: stumme@mathematik.tu-darmstadt.de
CC: ganter@math.tu-dresden.de
Referenzen: 1

Hi Bernhard/Gerd. . .

The referees I u

Richard Cole
 Bernd Groh

Conferences/ICCS2000
 vs.
 AUSTRALIA/eklund.peter

In konventionellen Email-Managern erfolgt
 Abspeicherung der Mails in Baumstruktur
 → nur ein möglicher Suchpfad, der bereits bei
 Abspeicherung festgelegt werden muss

Concept Email Manager

File Lattice View

Im CEM kann eine Email mehreren Schlagworten zugeordnet werden.

From	Count	✓	✗
From Friends	165	+	+
From Organisation	1878	✓	+
From Griffith Uni	1431	✓	+
From KVO Members	937	+	+
From Darmstadt Group	308	✓	+
From Rudolf Wille	0	+	+
From Jo Hereth	10	+	+
From Gerd Stumme	298	✓	+
from Gerd	298	✓	+
from stumme@	286	+	+
From g.stumme@	12	✓	+
From Darmstadt	46	+	+
From Mailing List	2617	+	✗
CG Mailing List	329	+	✗
To Hermes	2117	+	✗
To Hermes Elec	427	+	✗
To Hermes Chat	893	+	✗
To Hermes Joke	736	+	✗
Text Retrieval List	171	+	✗
Conferences	143	✓	✓
ICCS	114	✓	✓
ICCS 00	26	✓	✓
ICCS Paper with Stumme	1	✓	✓
ICCS 99	7	+	+

From	Subject
Gerd Stumme	Paper
Gerd Stumme	llncs.cls
Gerd Stumme	Paper
Gerd Stumme	Re: [Fwd: Umschlagsentw...

Blank Navigation View Email

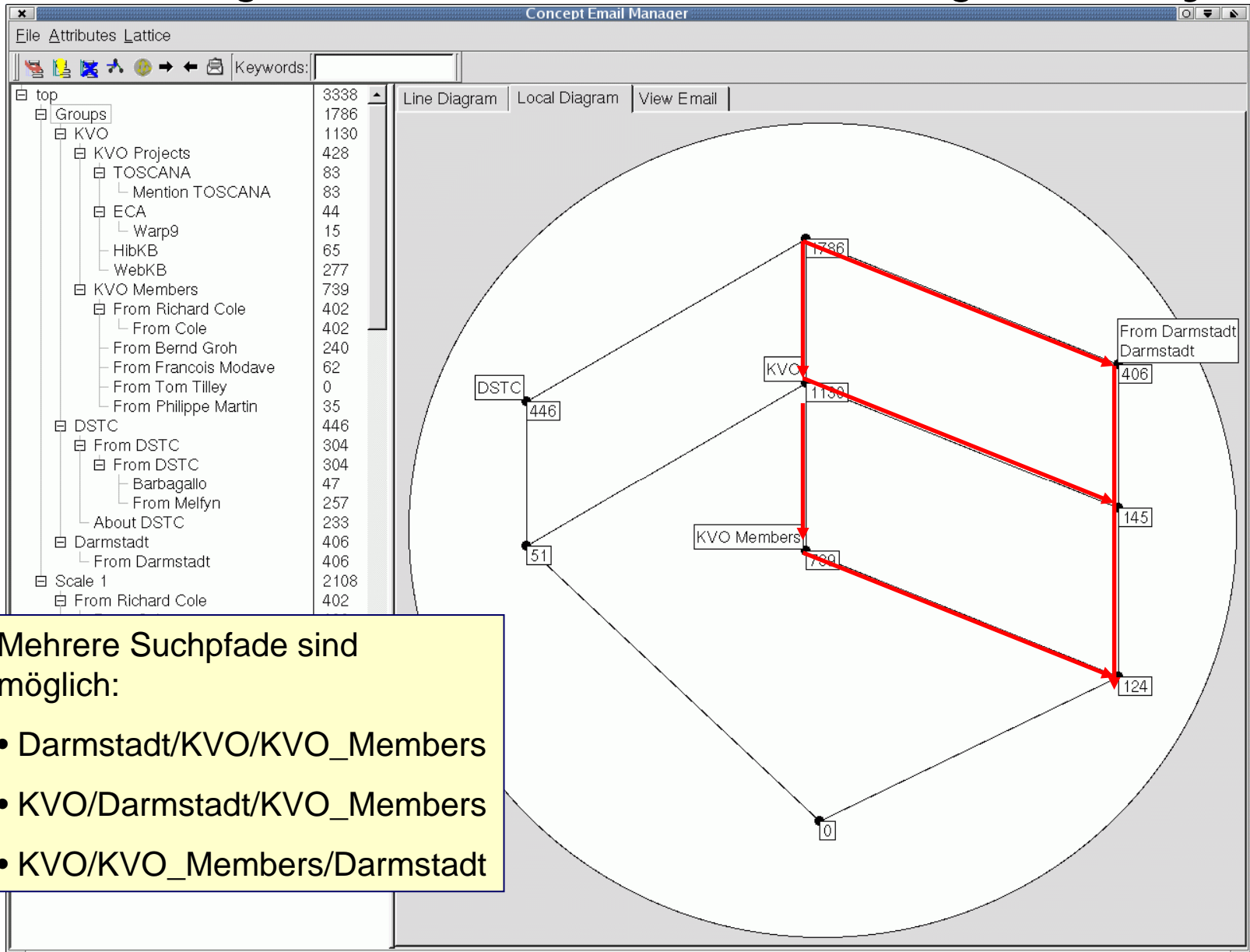
to: "r.cole@gu.edu.au" <r.cole@gu.edu.au>
 <stumme@mathematik.tu-darmstadt.de>
 from: "Gerd Stumme" <g.stumme@gu.edu.au>
 Subject: Paper

Hi Richard,

here's the Tex-File of our paper. :
 llncs.cls, please have a look at tl
 follow the links to the Springer A

See you at the Sushi place
 Gerd

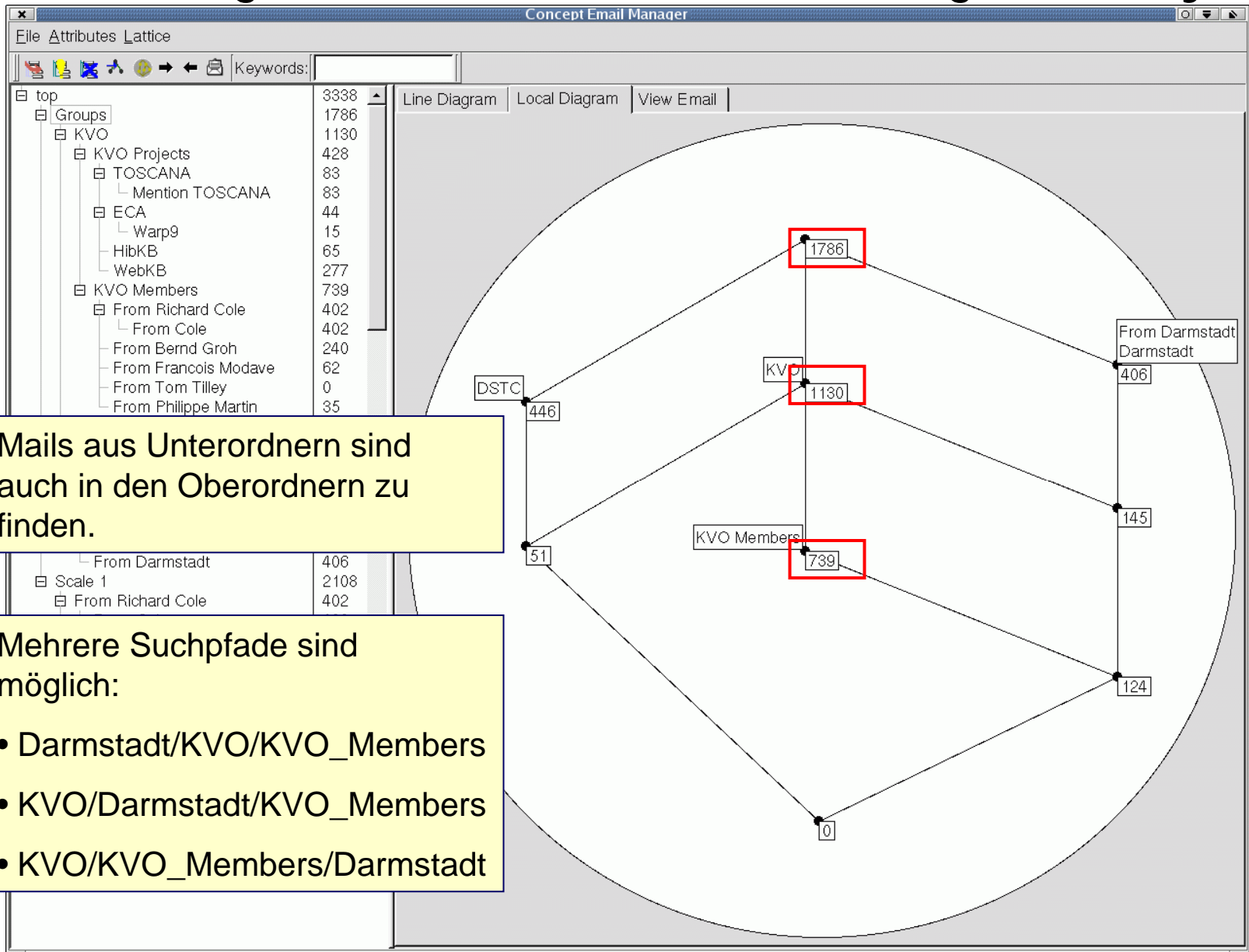
Browsing basierend auf Formaler Begriffsanalyse



Mehrere Suchpfade sind möglich:

- Darmstadt/KVO/KVO_Members
- KVO/Darmstadt/KVO_Members
- KVO/KVO_Members/Darmstadt

Browsing basierend auf Formaler Begriffsanalyse



Concept Email Manager

File Attributes Lattice

Keywords:

Line Diagram Local Diagram View Email

top 3338

- Groups 1786
 - KVO 1130
 - KVO Projects 428
 - TOSCANA 83
 - Mention TOSCANA 83
 - ECA 44
 - Warp9 15
 - HibKB 65
 - WebKB 277
 - KVO Members 739
 - From Richard Cole 402
 - From Cole 402
 - From Bernd Groh 240
 - From Francois Modave 62
 - From Tom Tilley 0
 - From Philippe Martin 35
 - DSTC 446
 - From DSTC 304
 - From DSTC 304
 - Barbagallo 47
 - From Melfyn 257
 - About DSTC 233
 - Darmstadt 406
 - From Darmstadt 406
 - Scale 1 2108
 - From Richard Cole 402
 - From Cole 402
 - EED 3
 - About EED 1
 - Mention EED 3
 - From EED 0
 - eklund 1272

Zoom 0

- KVO
- KVO

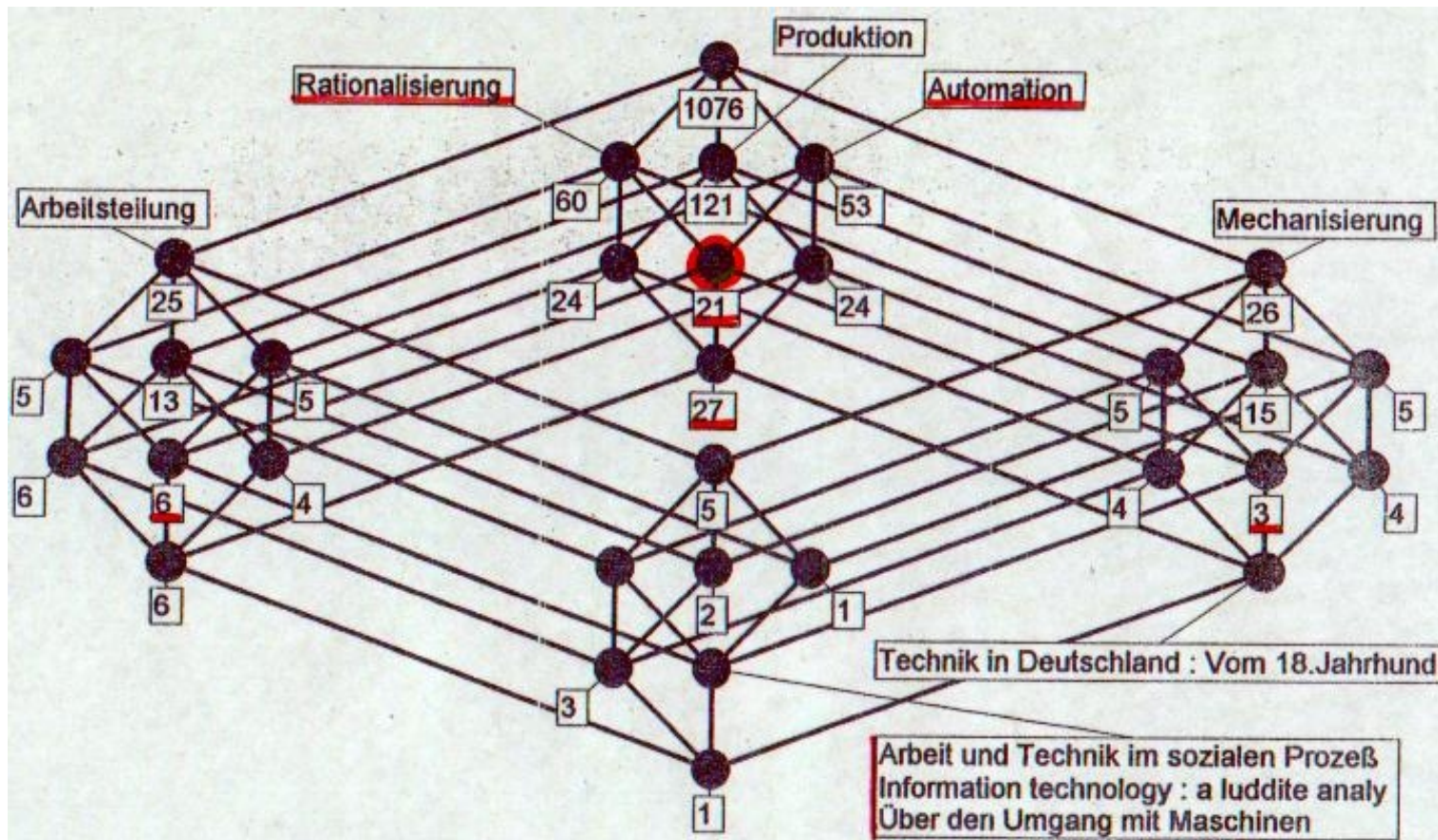
Verschiedene Sichten können kombiniert werden.

The diagram is a network graph with nodes and edges. Nodes are labeled with group names and counts: 'From Philippe Martin' (739), 'From Richard Cole' (402), 'From Francois Modave' (62), 'From Bernd Groh' (240), 'TOSCANA' (25), 'ECA' (2), 'WebKB' (9), 'HibKB' (1), and 'eklund' (0). Edges connect these nodes, representing email relationships. The graph is contained within a large oval frame.

III Formale Begriffsanalyse

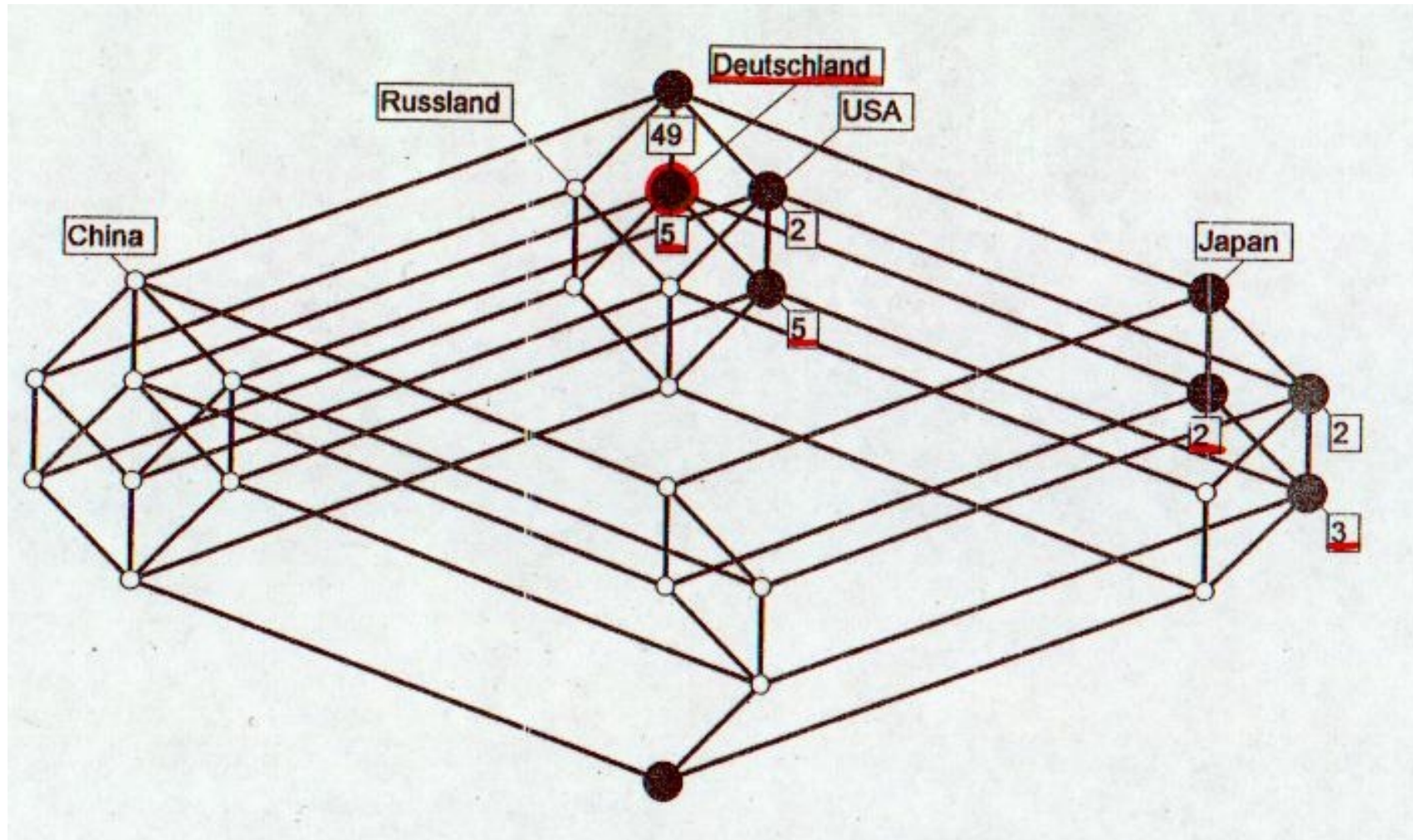
Information Retrieval in der Bibliothek des Zentrums für Interdisziplinäre Technikforschung, TU Darmstadt

Beispiel: Suche nach älterer Literatur über Automatisierung in den wichtigsten Industrienationen



Skala Produktionswandel

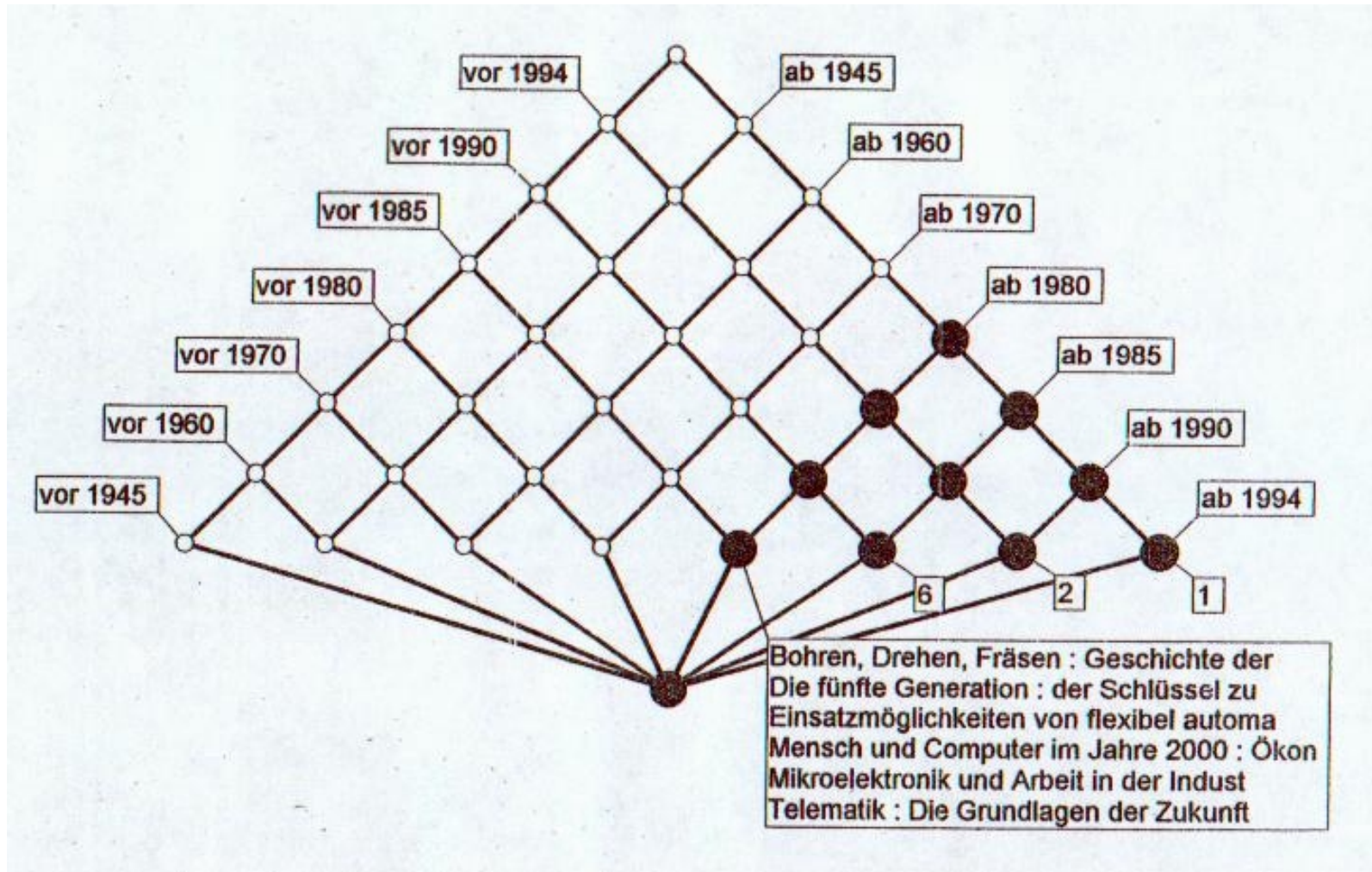
III Formale Begriffsanalyse



Skala Wichtige Industriestaaten

(eingeschränkt auf Bücher mit den Schlagwörtern Automation und Rationalisierung)

III Formale Begriffsanalyse



Skala Erscheinungsjahr

(eingeschränkt auf Bücher mit den Schlagwörtern Deutschland, Automation und Rationalisierung)

III Formale Begriffsanalyse

Ergebnis der Suche

Die Daten zum Buch

Titel: Mikroelektronik und Arbeit in der Industrie

Autor: Sorge, Arndt

Signatur: 3.4 SOR

Erscheinungsjahr: 1982

Abstract: Erfahrungen beim Einsatz von CNC-Maschinen in Großbritannien und der Bundesrepublik Deutschland

H < Datensatz: 1 von 1 > X

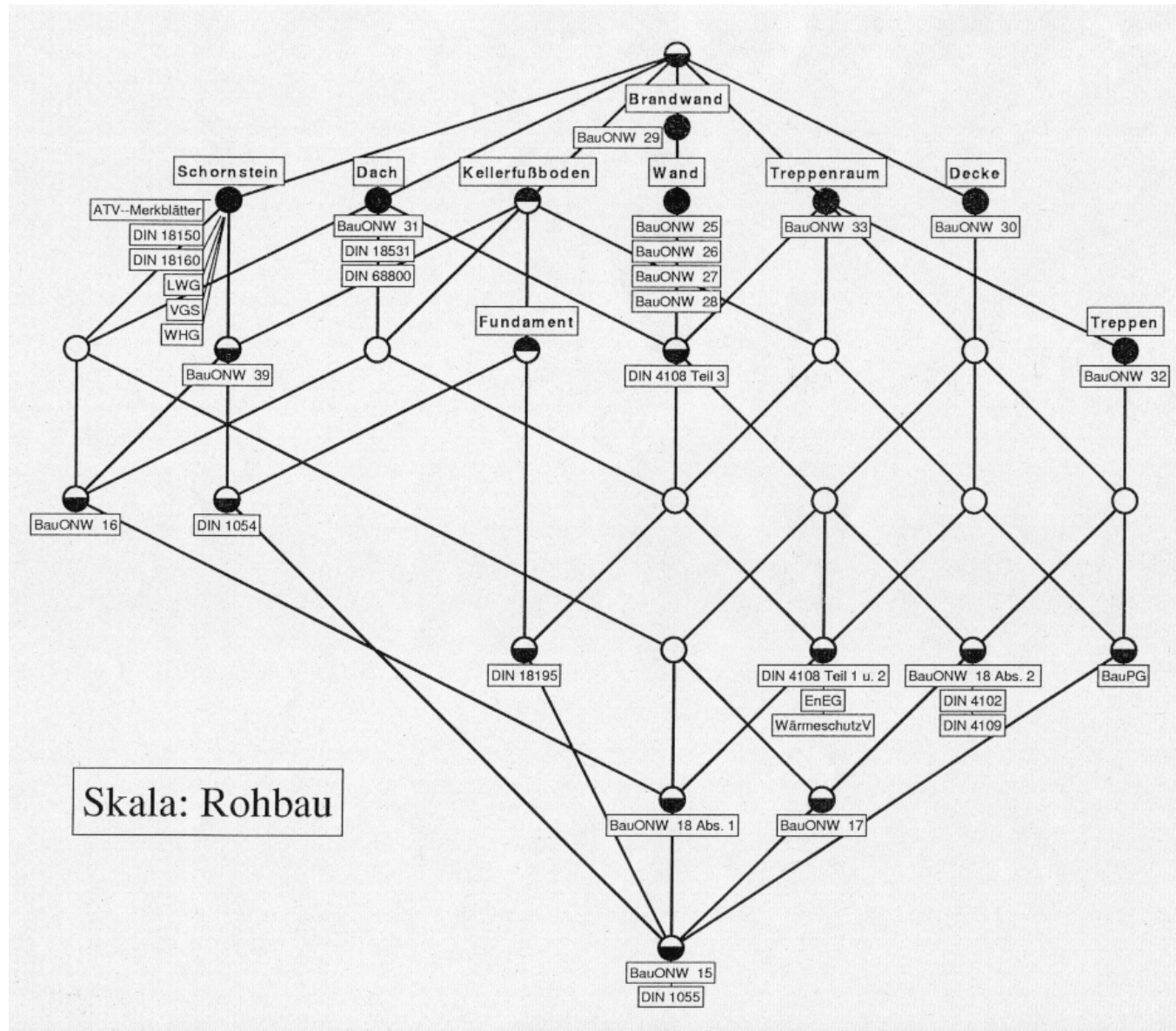
4.4 Beispiel

Baurecht
in Nordrhein-
Westfalen

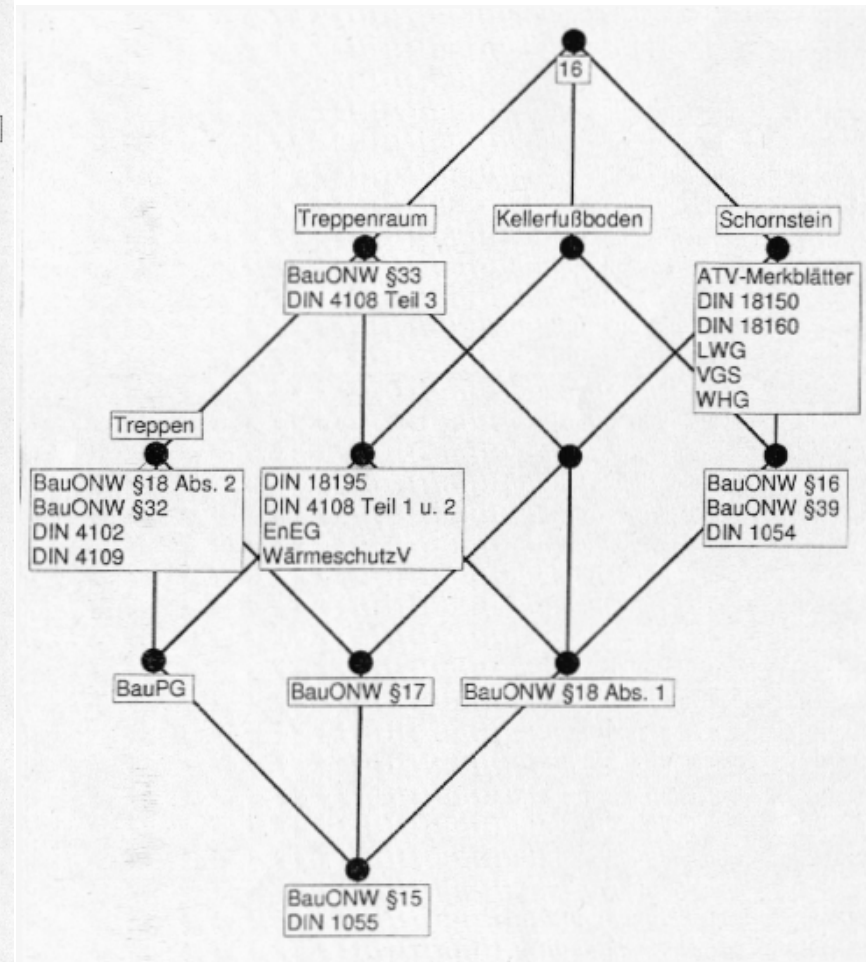
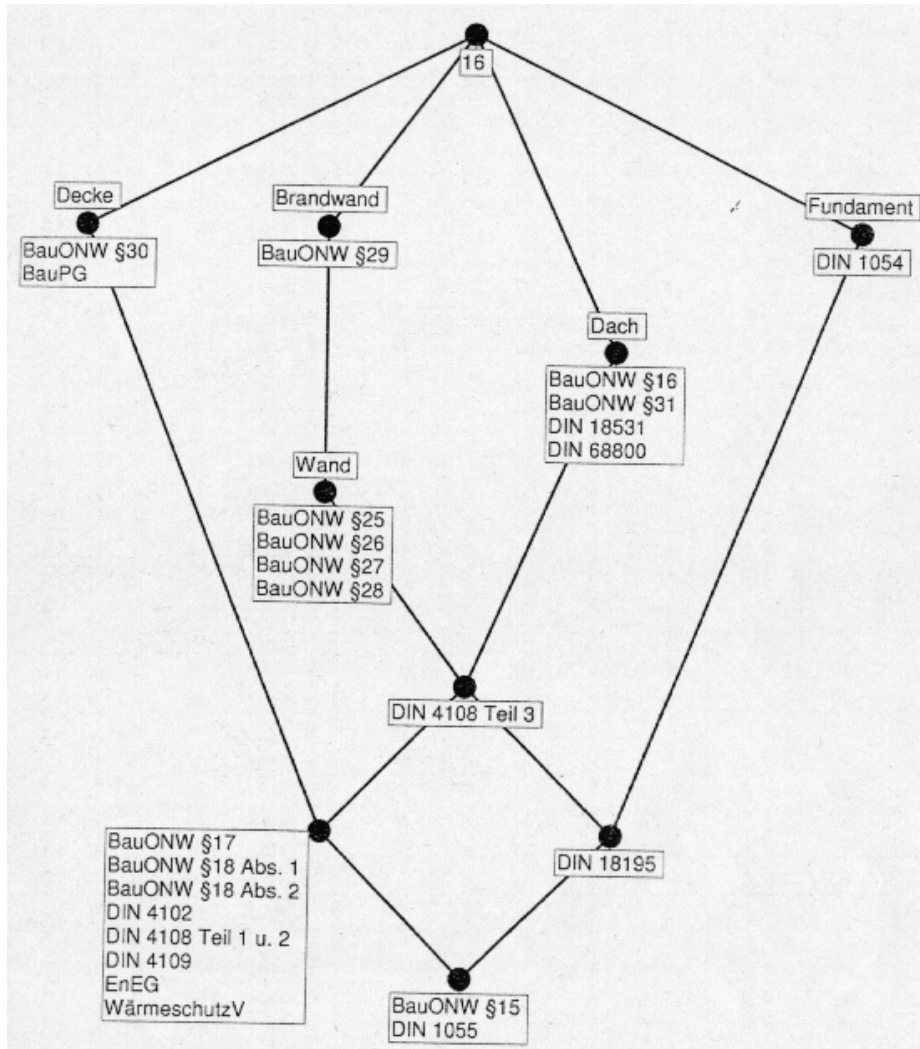
Aus: D. Eschenfelder, W. Kollewe, M. Skorsky, R. Wille: Ein Erkundungssystem zum Baurecht: Methoden der Entwicklung eines TOSCANA-Systems. In: G. Stumme, R. Wille (Hrsg.): Begriffliche Wissensverarbeitung - Methoden und Anwendungen. Springer 2000

	Dach	Decke	Wand	Brandwand	Treppen	Treppenraum	Fundament	Kellerfußboden	Schornstein
BauONW 15	X	X	X	X	X	X	X	X	X
BauONW 16	X	X	X	X	X	X	X	X	X
BauONW 17	X	X	X	X	X	X	X	X	X
BauONW 18 Abs. 1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
BauONW 18 Abs. 2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
BauONW 25			X	X	X	X	X	X	X
BauONW 26			X	X	X	X	X	X	X
BauONW 27			X	X	X	X	X	X	X
BauONW 28			X	X	X	X	X	X	X
BauONW 29			X	X	X	X	X	X	X
BauONW 30		X							
BauONW 31	X								
BauONW 32					X	X			
BauONW 33						X			
BauONW 36									
BauONW 39							X	X	
BauONW 40							X	X	
BimSchG									
BauPG		X			X	X	X		
EnEG	X	X	X	X	X	X	X	X	
WHG								X	X
LWG								X	X
WärmeschutzV	X	X	X	X	X	X	X	X	
HeizAnlV									
BimSchV									
VGS								X	
DIN 1054							X	X	X
DIN 1055	X	X	X	X	X	X	X	X	X
DIN 4102	X	X	X	X	X	X	X	X	X
DIN 4108 Teil 1 u. 2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
DIN 4108 Teil 3	X	X	X	X	X	X	X	X	X
DIN 4109	X	X	X	X	X	X	X	X	X
DIN 18150									X
DIN 18160									X
DIN 18195	X		X	X	X	X	X	X	
DIN 18531	X								
DIN 68800	X								
DIN-Normen für Feuerungsanlagen									
DIN-Normen für Entwässerung									
ATV-Merkblätter									X

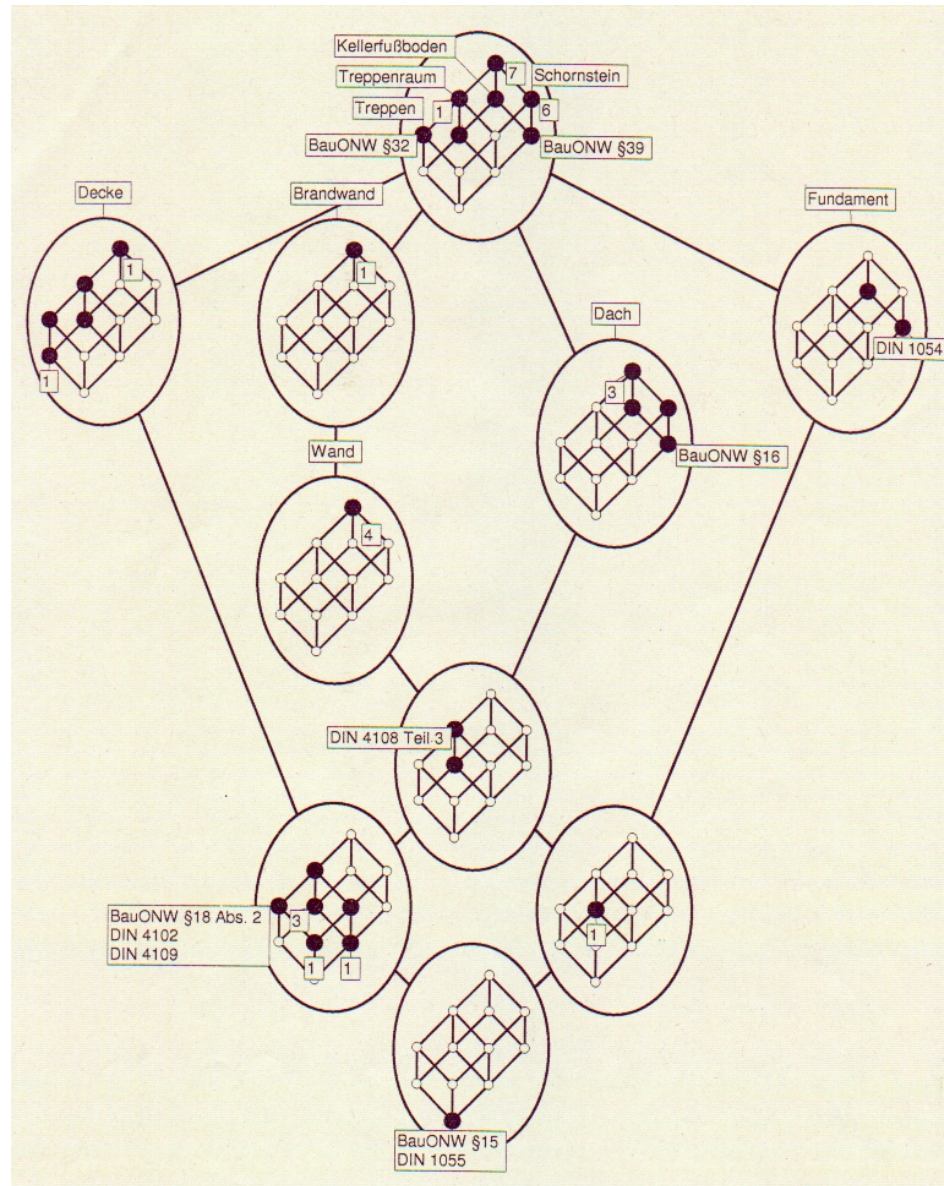
III Formale Begriffsanalyse



III Formale Begriffsanalyse



III Formale Begriffsanalyse



SIMuLLDA

**Structured Interlingua MultiLingual
Lexical Database Application**

Marteen Janssen

Alle Abbildungen aus
SIMuLLDA - a Multilingual Lexical Database Application
using a Structural Interlingua, Dissertation M. Janssen 2002

	horse	male	female	adult	young
horse	×				
stallion	×	×		×	
mare	×		×	×	
foal	×				×
filly	×		×		×
colt	×	×			×

Table 2.5: Analysis of Definitions for Horses

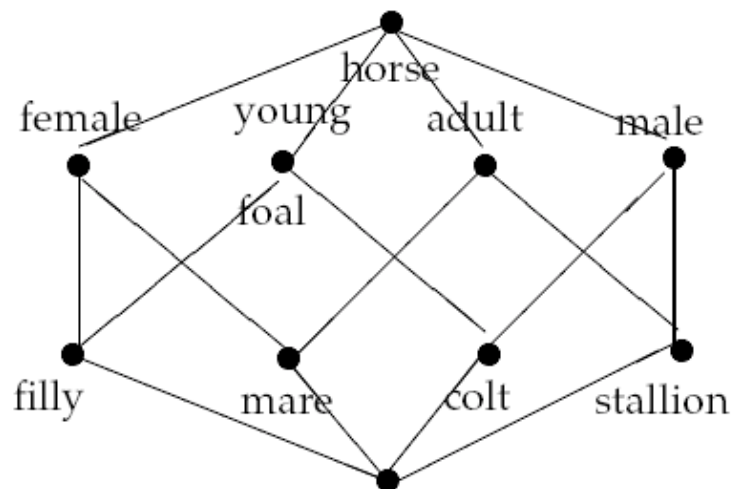


Figure 2.5: Concept Lattice for Horses

English	horse	stallion	mare	foal	filly	colt
Dutch	paard	hengst	merrie	veulen	merrieveulen	hengstveulen
German	Pferd	Hengst	Stute	Fohlen Füllen	Stutenfohlen Stutenfüllen	Hengstfohlen Hengstfüllen
French	cheval	étalon	jument	poulain	pouliche	<i>no spec. word</i>
Italian	cavallo	stallone	cavalla giumenta	puledro	puledra	<i>no spec. word</i>
Hungarian	ló	csödör	kanca	csikó	fruska	<i>no spec. word</i>
Swedish	häst	hingst	sto	föl	ungsto	unghingst
Russian	лошадь	жеребёц	кобыла	жеребёнок	кобылица	<i>no spec. word</i>
Georgian	ცხენი		ჯიჯი	ძიჯი	ცხ.ბაჭი	<i>no spec. word</i>
Malay	kuda	kuda jantan	kuda betina	anak kuda	anak kuda betina	anak kuda jantan

Table 2.6: Words for Horses in Different Languages

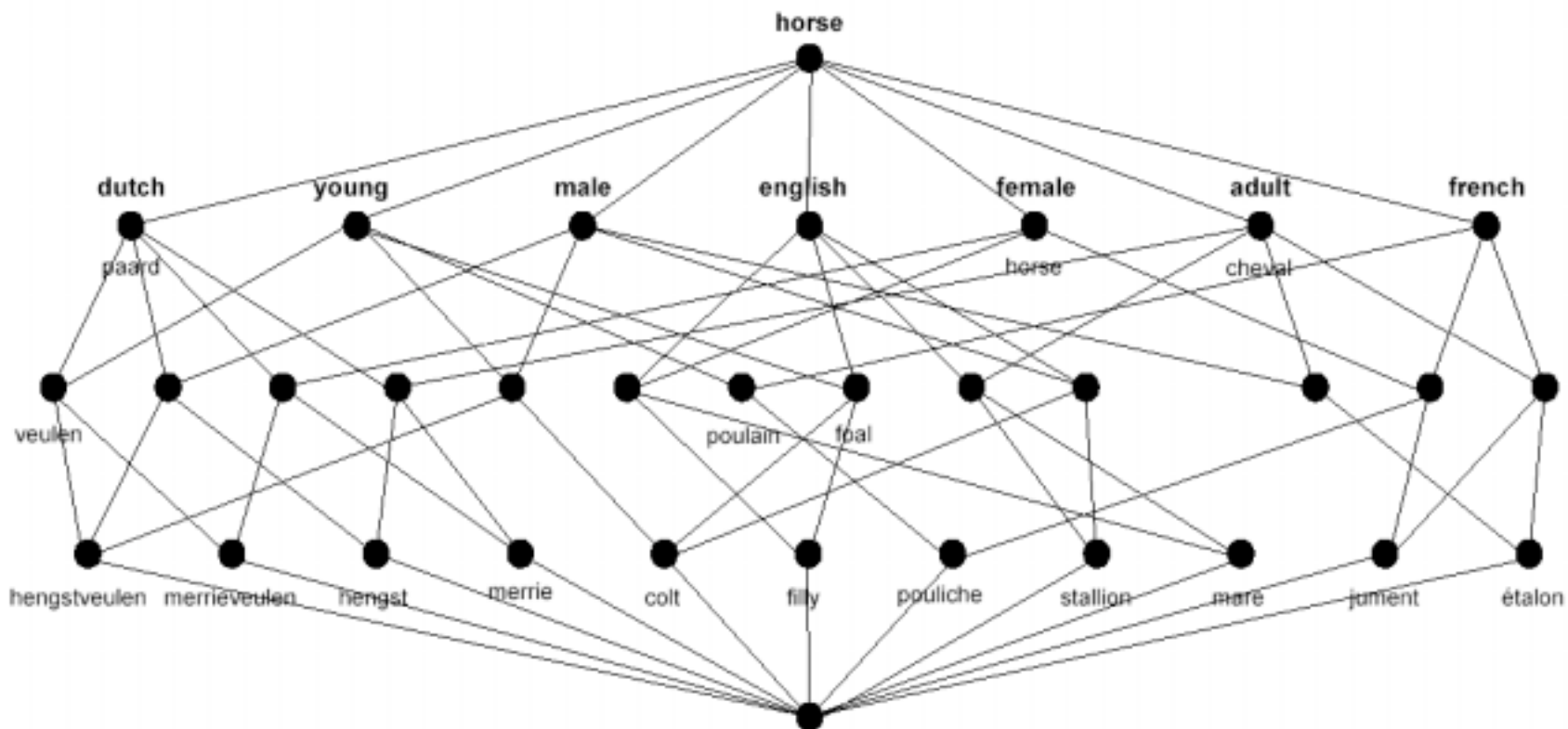


Figure 2.6: Multilingual Connotative Context

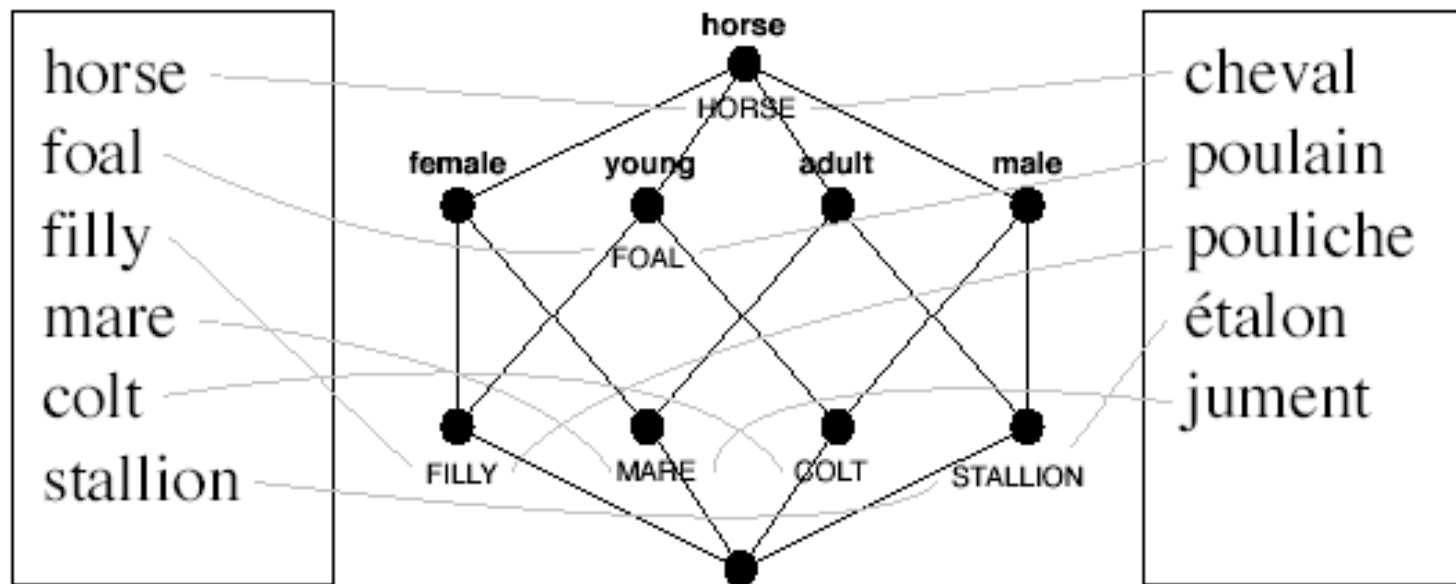


Figure 2.7: Partial Multilingual Set-up

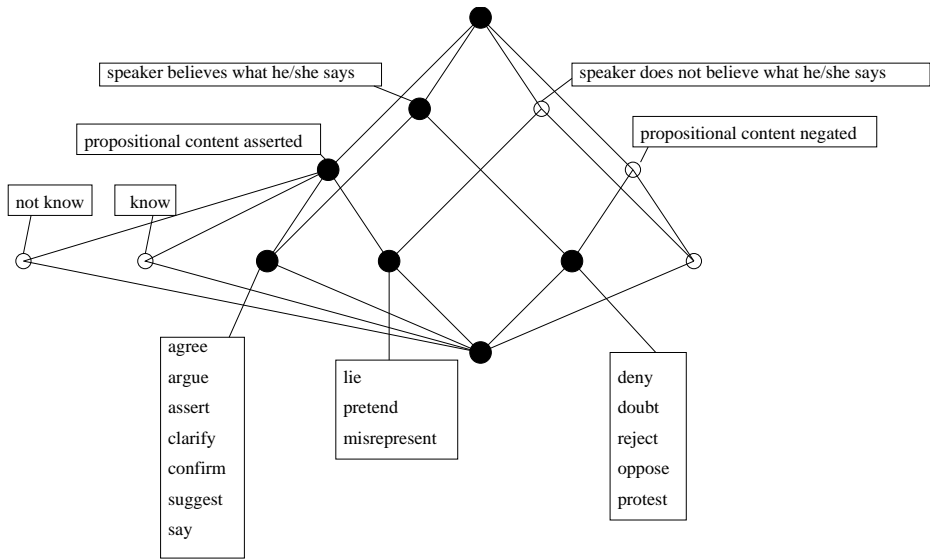
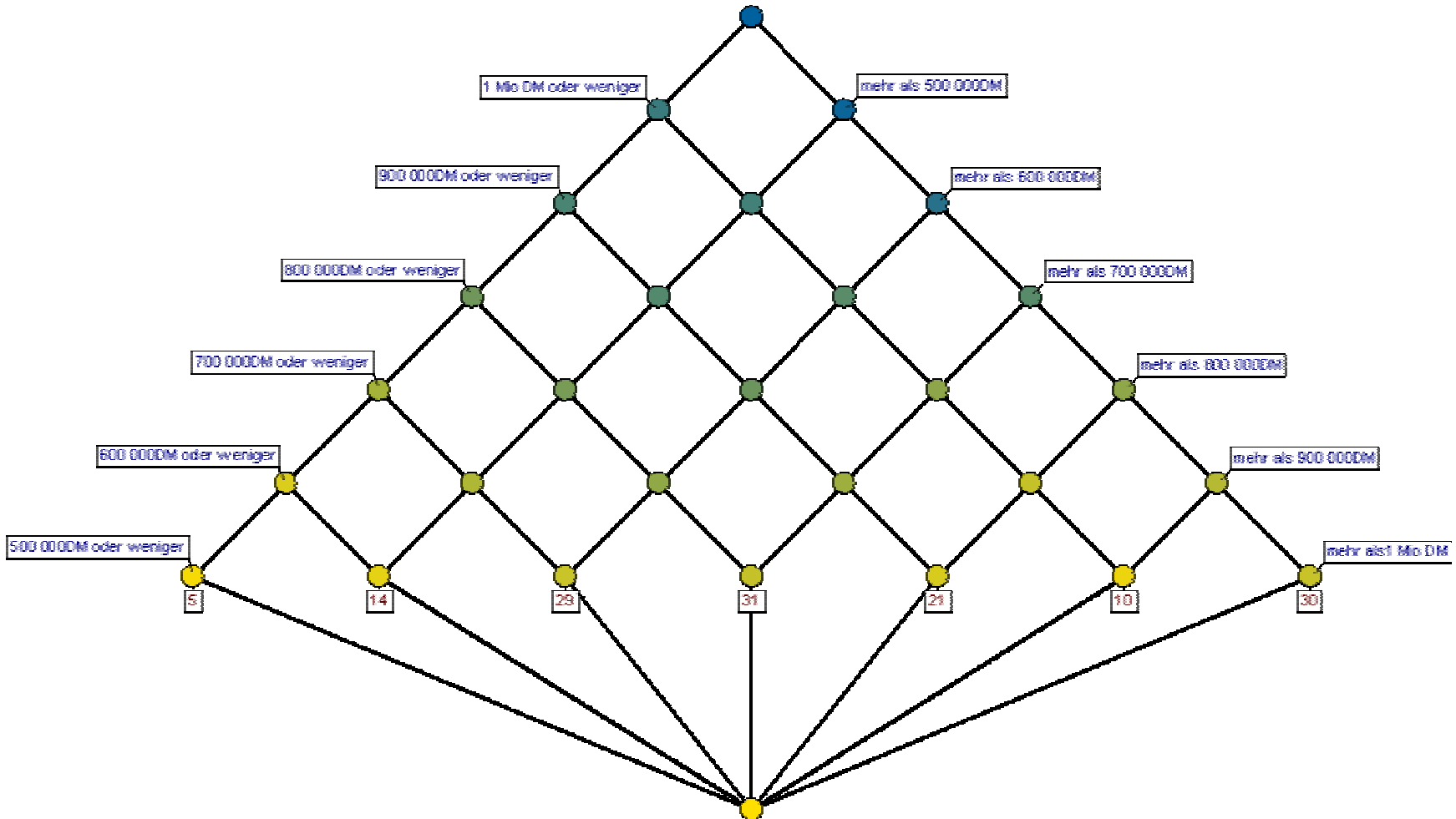
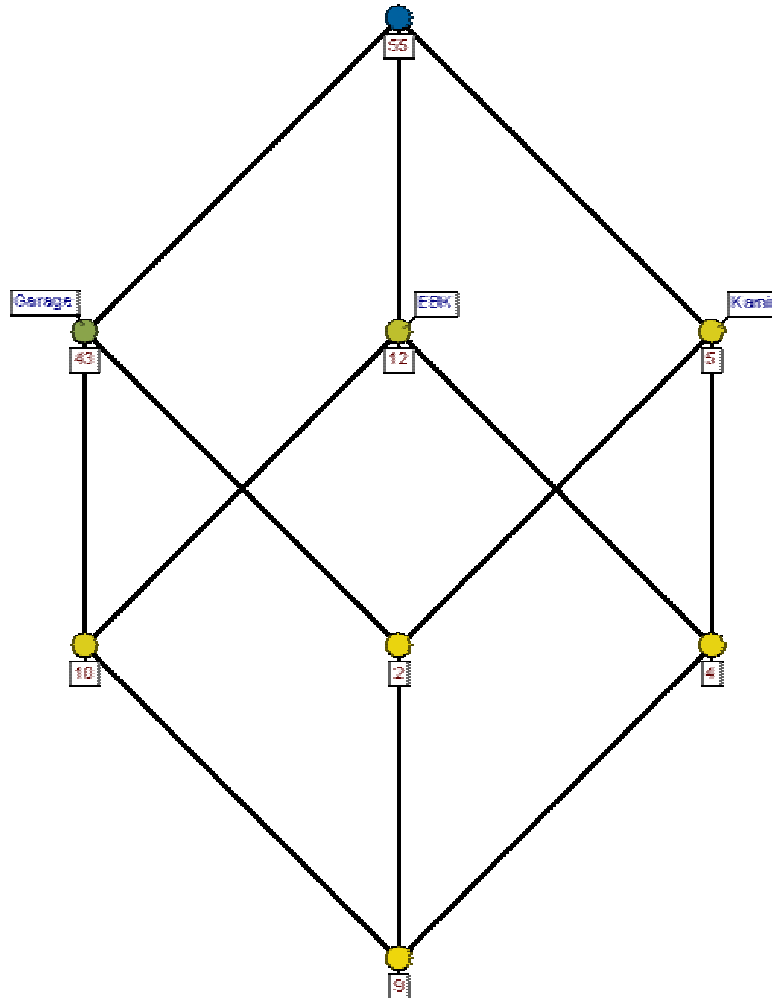


Fig. 1. Verb speech acts in analogy to Großkopf & Harras (1999)

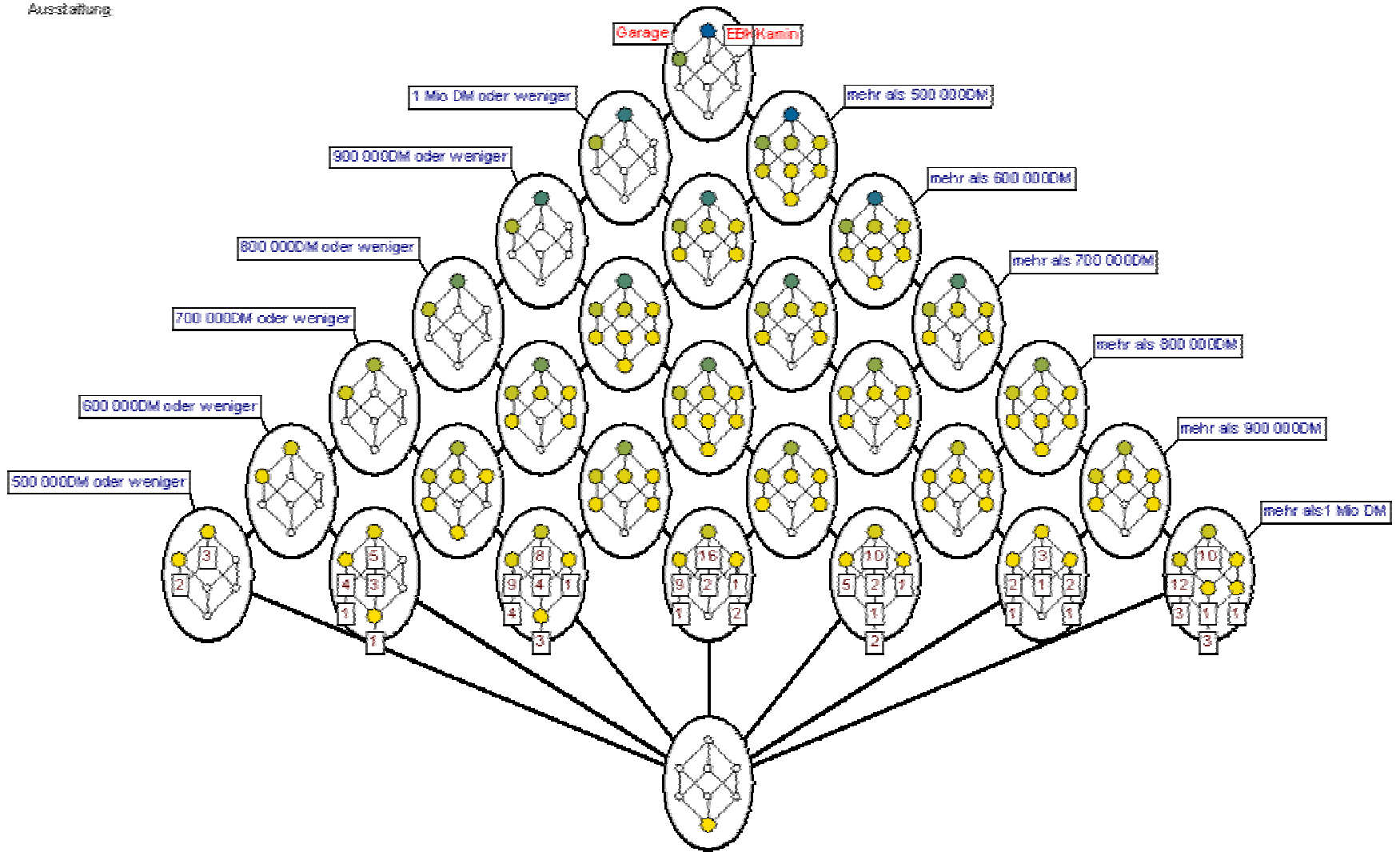
Planung zum Kauf eines Hauses



gewünschte Features



Preis
Ausstattung



Seminar: Formale Begriffsanalyse

Grundlagen der Mengenlehre

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de

18. April 2006

Mengen

Definition 1. *Eine Menge ist eine Zusammenfassung beliebiger Objekte, genannt Elemente, zu einer Gesamtheit, wobei keines der Objekte die Menge selbst sein darf. Zwei Mengen sind **gleich**, g.d.w. sie die gleichen Elemente enthalten. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** \emptyset .*

Bemerkung: (Polaritätsprinzip) Für jedes Objekt a und jede Menge M gilt entweder $a \in M$ oder $a \notin M$.

Mengenbeschreibungen — explizit und implizit

explizite Mengendarstellung $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente a_1, a_2, \dots, a_n enthält.

Beispiel: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

implizite Mengendarstellung $\{x : A\}$, bzw. $\{x \mid A\}$, ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel: $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 8 \text{ und } 1 < x\}$

Teilmenge / Obermenge

Definition 2. Eine Menge T ist eine **Teilmenge** der Menge M ($T \subseteq M$) g.d.w. alle Elemente von T auch Elemente von M sind. M heißt dann **Obermenge** von T . Die Relation \subseteq heißt **Mengeninklusion**. T ist eine **echte Teilmenge** von M ($T \subset M$) g.d.w. $T \subseteq M$ und $T \neq M$.

Bemerkung: Die Mengeninklusion ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch

Definition 3. Die **Potenzmenge** $\wp(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M .

$$\wp(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{T \mid T \subseteq M\}$$

Bemerkung: Die Potenzmenge $\wp(M)$ einer n -elementigen Menge M enthält 2^n Elemente.

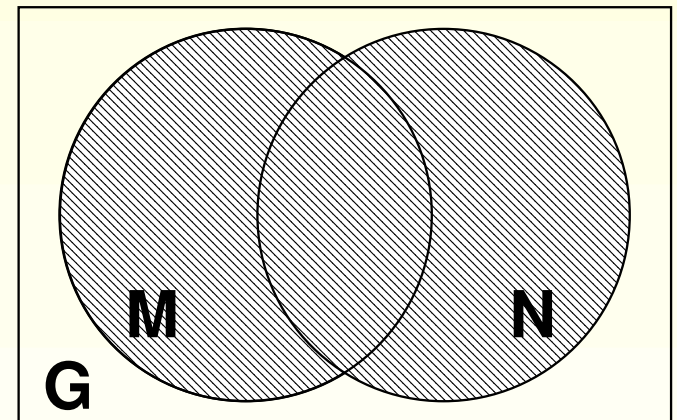
Vereinigung

Definition 4. Die Vereinigung zweier Mengen M und N ($M \cup N$) ist die Menge aller Objekte, die Element von M oder von N sind:

$$M \cup N \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

Proposition 5. [Eigenschaften der Vereinigung] Für beliebige Mengen M und N gilt:

- a) $M \cup M = M$
- b) $M \cup \emptyset = M$
- c) $M \cup N = N \cup M$
- d) $M \cup N \supseteq M$



$M \cup N$

Bemerkung: Mengen werden häufig mit Hilfe von so genannten Venn-Diagrammen visualisiert (siehe Bild).

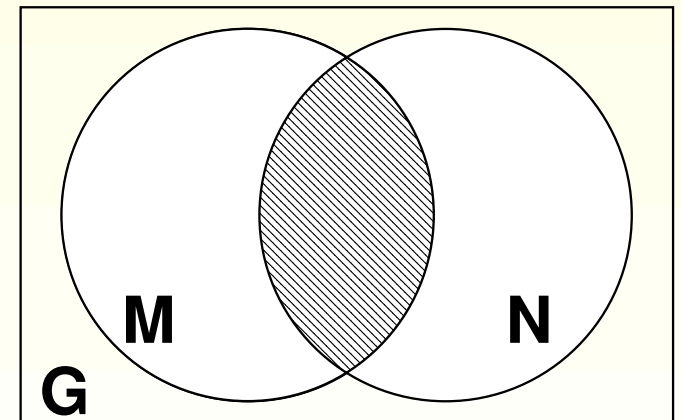
Durchschnitt

Definition 6. Der **Durchschnitt** zweier Mengen M und N ($M \cap N$) ist die Menge aller Objekte, die sowohl Element von M als auch von N sind:

$$M \cap N \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$$

Proposition 7. [Eigenschaften des Durchschnitts] Für beliebige Mengen M , N und P gilt:

- a) $M \cap M = M$
- b) $M \cap \emptyset = \emptyset$
- c) $M \cap N = N \cap M$
- d) $M \cap N \subseteq M$
- e) $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$
- f) $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$



$M \cap N$

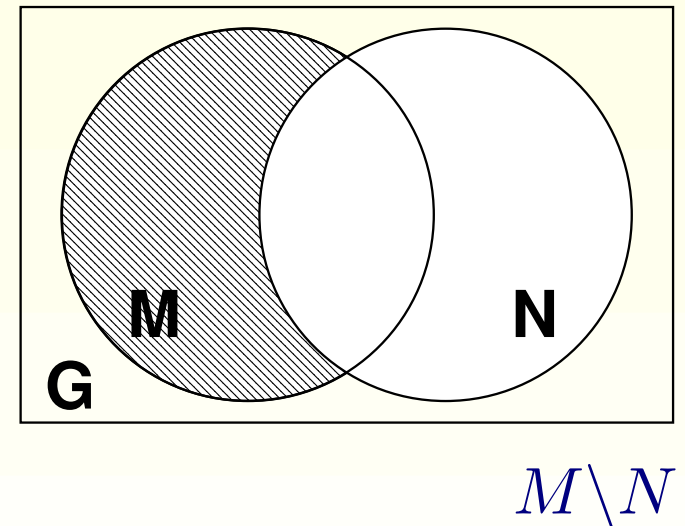
Differenz

Definition 8. Die **Differenz** zweier Mengen M und N ($M \setminus N$) ist die Menge aller Objekte, die Element von M aber nicht von N sind:

$$M \setminus N \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

Proposition 9. [Eigenschaften der Differenz] Für beliebige Mengen M und N gilt:

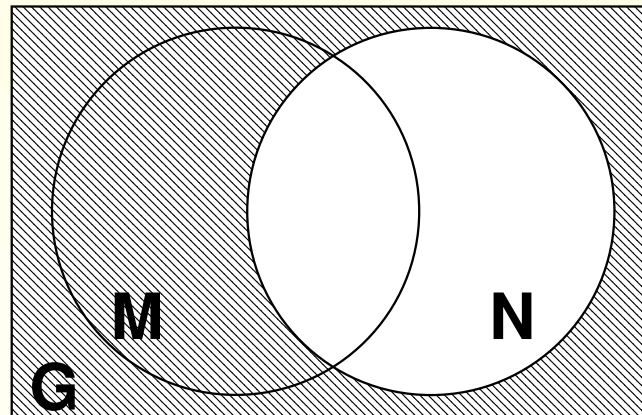
- a) $M \setminus M = \emptyset$
- b) $M \setminus \emptyset = M$
- c) $M \setminus N \subseteq M$
- d) $M \setminus N = M$ g.d.w. $M \cap N = \emptyset$
- e) $M \subseteq (M \setminus N) \cup N$
- f) $M = (M \setminus N) \cup N$ g.d.w. $N \subseteq M$



Komplement

Definition 10. Sei M eine Teilmenge einer gegebenen Grundmenge G , dann ist das Komplement von M bzgl. G ($\mathcal{C}_G(M)$) die Differenz von G und M :

$$\mathcal{C}_G(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in G \text{ und } x \notin M\}$$



$$\mathcal{C}_G(N)$$

Eigenschaften des Komplements

Proposition 11. [Eigenschaften des Komplements] Für beliebige Teilmengen M und N von G gilt:

a) $\mathcal{C}_G(\emptyset) = G$

b) $\mathcal{C}_G(G) = \emptyset$

c) $\mathcal{C}_G(\mathcal{C}_G(M)) = M$

d) $M \cup \mathcal{C}_G(M) = G$

e) $M \cap \mathcal{C}_G(M) = \emptyset$

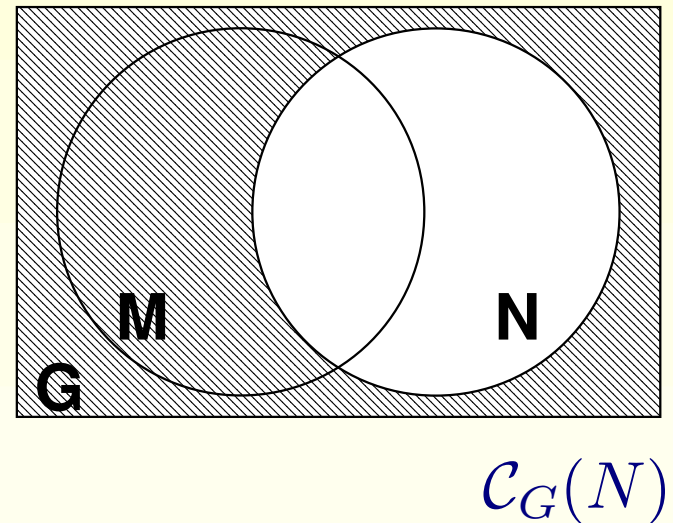
f) $M \setminus N = M \cap \mathcal{C}_G(N)$

g) $\mathcal{C}_G(M \cup N) = \mathcal{C}_G(M) \cap \mathcal{C}_G(N)$

(1. Gesetz von **de Morgan**)

h) $\mathcal{C}_G(M \cap N) = \mathcal{C}_G(M) \cup \mathcal{C}_G(N)$

(2. Gesetz von *de Morgan*)



Kreuzprodukt

Definition 12. Seien M und N beliebige Mengen, dann ist das **Kreuzprodukt** von M und N ($M \times N$) die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element ein Element von M ist und deren zweites Element ein Element von N ist.

$$M \times N \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, n) : m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Übungsaufgaben

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie zu den folgenden Mengen jeweils ein Venn-Diagramm:
 - (a) $\mathcal{C}_G(M) \cap \mathcal{C}_G(N)$
 - (b) $(M \setminus N) \cup N$
 - (c) $(M \cup N) \setminus N$
2. Beweisen Sie mindestens drei Teilaussagen von Proposition 7.
3. Beweisen Sie mindestens drei Teilaussagen von Proposition 11.