Seminar: Formale Begriffsanalyse
Ordnungsrelationen und Begriffsordnung

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de
SoSe 2010

3. Foliensatz

binäre Relation

Definition 1. *Eine* $\boldsymbol{bin\ddot{a}re\ Relation}$ R *zwischen zwei Mengen M und N ist eine Menge von Paaren* (m, n) *mit* $m \in M$ *und* $n \in N$*, also* $R \subseteq M \times N$*.*

Statt $(m, n) \in R$ *schreibt man auch* mRn*.*

Ist $M = N$*, so ist* R *eine* $\boldsymbol{bin\ddot{a}re\ Relation\ auf\ der\ Menge}$ M*.*

$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \mid (m, n) \in R\}$ *ist die zu* R $\boldsymbol{inverse\ Relation}$*.*

besondere binäre Relationen

Definition 2. *Eine binäre Relation R auf M heißt:*

reflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : xRx$,

irreflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : \neg xRx$,

symmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* yRx,

asymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* $\neg yRx$,

antisymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy *und* $x \neq y$, *dann* $\neg yRx$,

konnex / linear *g.d.w.* $\forall x, y \in M : xRy$ *oder* yRx *oder* $x = y$,

transitiv *g.d.w.* $\forall x, y, z \in M$: *wenn* xRy *und* yRz, *dann* xRz.

Äquivalenzrelation

Definition 3. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine* $\boldsymbol{Äquivalenzrelation}$*, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und $a, b \in M$, so schreibt man statt aRb auch $a \sim_R b$ und sagt: a ist äquivalent zu b bezüglich R.

Man kann die Elemente von M in Klassen äquivalenter Elemente einteilen; für ein Element $a \in M$ heißt die Klasse

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{b : b \in M \text{und } a \sim_R b\}$$

die $\boldsymbol{Äquivalenzklasse}$ *von a bezüglich R. Die Menge*

$$M/R \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_R : a \in M\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus M bezüglich R heißt $\boldsymbol{Quotient}$ *von M bezüglich R.*

Eigenschaften der Äquivalenzrelation

Bemerkung: Seien a und b Elemente einer Menge M und R eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt:

$$[a]_R \neq \emptyset, \qquad [a]_R = [b]_R \text{ g.d.w. } a \sim_R b, \qquad a \nsim b \text{ g.d.w. } [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

Ordnungsrelationen

Definition 4. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

Quasiordnung/Präordnung, *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*

partielle Ordnung, *wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*

lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*

(M, R) *heißt partiell/linear ...* ***geordnete Menge****.*

Bemerkung: Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

Ordnungsrelationen

Definition 5. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

Quasiordnung/Präordnung, *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*
(Beispiel: in derselben Schulklasse sein; Äquivalenzrelationen)

partielle Ordnung, *wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subseteq)$)

lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$)

(M, R) *heißt partiell/linear ...* ***geordnete Menge****.*

Bemerkung: Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

strikte Ordnungen

Definition 6. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

strikte partielle Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*

totale / strikt lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

strikte Ordnungen

Definition 7. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

strikte partielle Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subset)$)

totale / strikt lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), <)$)

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

Nachbar / Hassediagramm

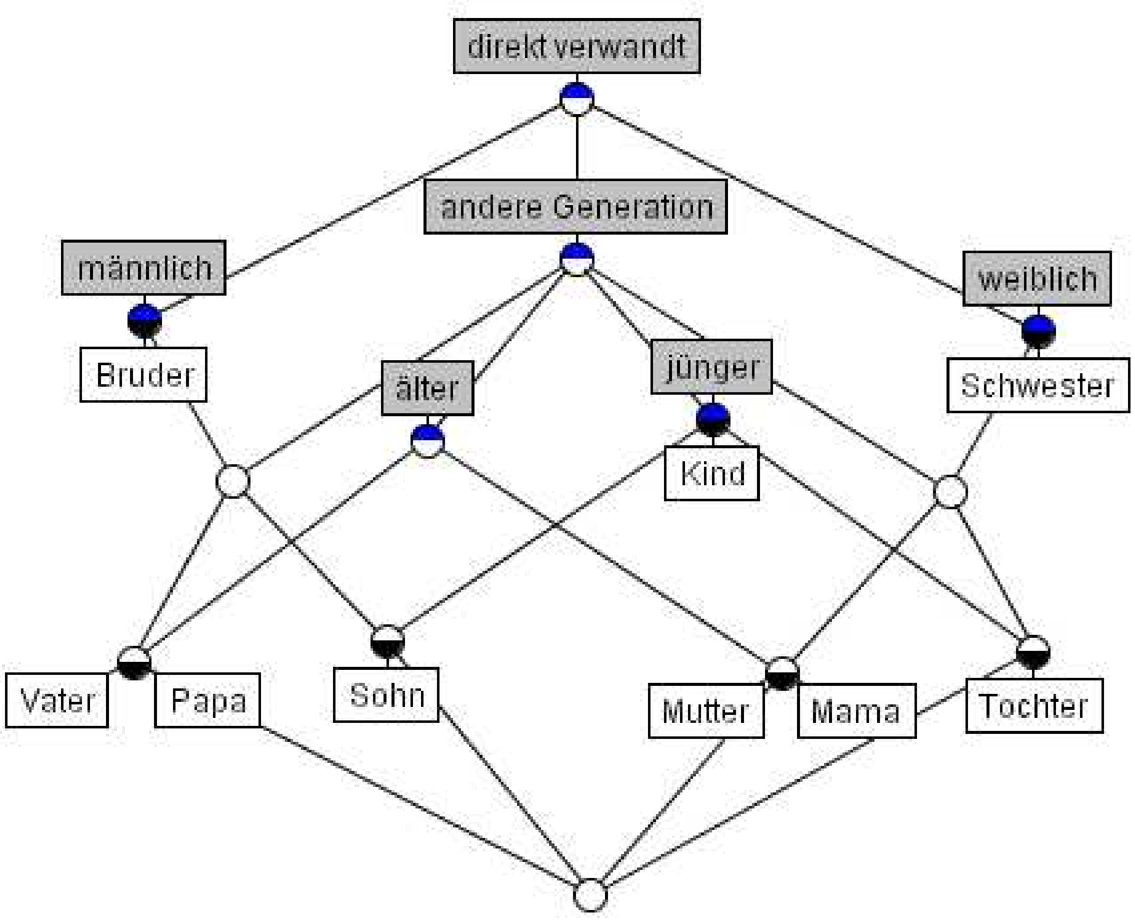
Definition 8. *Seien a und b zwei Elemente einer geordneten Menge $(M, \subseteq)$, b heißt* $\boldsymbol{oberer\ Nachbar}$ *von a g.d.w. $a \subseteq b$ und $a \neq b$ und wenn es kein von a und b verschiedenes Element c von M gibt, für das $a \subseteq c \subseteq b$ gilt. Man schreibt dann auch $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$.*

Bemerkung: Jede Ordnung $\subseteq$ auf einer Menge M legt eine natürliche Äquivalenzrelation '$=$' auf M fest: $\forall a, b \in M : a = b \Leftrightarrow a \subseteq b$ und $b \subseteq a$. Eine endliche geordnete Mengen $(M, \subseteq)$ kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jede $=$-Äquivalenzklasse von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daß $[a]$ unterhalb von $[b]$ liegt, wenn $a \subseteq b$. Zwei Punkte $[a]$ und $[b]$ werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

Die Abbildung zeigt das Hasse-Diagramm zu $\wp(\{1,2,3\},\subseteq)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \{\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Begriffsordnung



Definition 9. *Seien (A_1, B_1) und (A_2, B_2) zwei Begriffe eines formalen Kontextes mit $A_1 \subseteq A_2$, dann ist (A_1, B_1) ein* ***Unterbegriff*** *von (A_2, B_2); analog ist (A_2, B_2) ein* ***Oberbegriff*** *von (A_1, B_1) und man schreibt $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$.*

Übungsaufgaben

1. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge
   $M = (\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{1,2,3\},\{1,3\},\{2,4\},$
   $\{1,5\},\{1,\},\{3\},\{4\},\{5\},\{\}\},\subseteq)$.

2. Zeichne in das Hassediagramm der vorangegangenen Folie zu jedem Begriff die vollständige Extension und Intension ein.