Unterspezifikation in der Semantik
Hole Semantics

Laura Kallmeyer
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2011/2012

Overview

1. Idee
2. Hole Semantics

[Bos, 1995]

Idee (1)

Reyle's approach was developed for DRT.

Hole Semantics extends this to any logic.

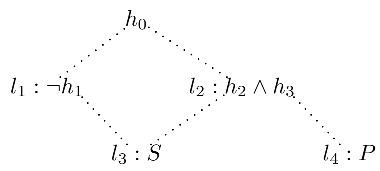
Distinction between labels and meta-variables over labels called holes. Whenever a subformula is not specified yet, a hole is used and constraints for this hole can be formulated.

(1) do not sleep and pay attention

- the top-most hole h_0 stands for the entire formula
- "do not" $\leadsto l_1 : \neg h_1$
- "and" $\leadsto l_2 : h_2 \wedge h_3$
- "sleep" $\leadsto l_3 : S$
- "pay attention" $\leadsto l_4 : P$

Idee (2)

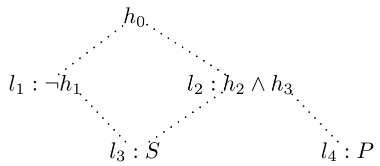
Es gibt folgende Teilausdrucksbeziehungen (*scope constraints*):
$l_3 \leq h_3$, $l_3 \leq h_2$, $l_4 \leq h_3$, $l_1 \leq h_0$, $l_2 \leq h_0$.



Die Constraints sind in der Regel von der Form $l_i \leq h_j$.

Idee (3)

Desambiguierung: Um die einzelnen Lesarten zu berechnen, muss man eine Zuordnung von Labels zu Holes finden, die die Teilausdrucksbeziehungen berücksichtigt.



Zwei mögliche Zuordnungen (*Pluggings*):

P_1		P_2	
$h_0 = l_1$	$h_1 = l_2$	$h_0 = l_2$	$h_1 = l_3$
$h_2 = l_3$	$h_3 = l_4$	$h_2 = l_1$	$h_3 = l_4$

Hole Semantics (1)

An underspecified representation (UR) is a triple $\langle H, L, C\rangle$ that consists of

- a finite set H of holes,
- a finite set L of labeled formulae,
- and a finite set C of constraints of the form $x \leq y$, $x, y \in H \cup L$.[a]

[a] Finiteness of the sets is not required in [Bos, 1995].

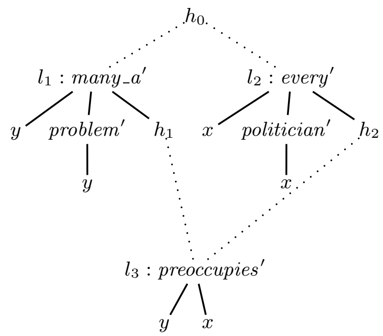
Hole Semantics (2)

Example (4) *Many a problem preoccupies every politician*:

UR $\langle H_{(4)}, L_{(4)}, C_{(4)}\rangle$ with

$$\begin{array}{lll} H_{(4)} & := & \{h_0, h_1, h_2\} \\ L_{(4)} & := & \{l_1 : \mathit{many\_a}'(y, \mathit{problmen}'(y), h_1), \\ & & l_2 : \mathit{every}'(x, \mathit{politician}'(x), h_2), \\ & & l_3 : \mathit{preoccupies}'(y, x)\} \\ C_{(4)} & := & \{l_1 \leq h_0, l_2 \leq h_0, l_3 \leq h_1, l_3 \leq h_2\} \end{array}$$

Hole Semantics (3)



Hole Semantics (4)

Define the subordination (SUB) relation determined by an UR:

Let l be a label, h a hole, and k, k' holes or labels in an UR $U = \langle H, L, C \rangle$. Then:

1. if there is a $k \leq k' \in C$, then $SUB_U(k, k')$ (C);
2. if there is a $l : \phi \in L$ and h is an argument of ϕ, then $SUB_U(h, l)$ (L);
3. $SUB_U(k, k)$ (reflexivity);
4. if there is a k'' with $SUB_U(k, k'')$ and $SUB_U(k'', k')$, then $SUB_U(k, k')$ (transitivity).
5. These are all pairs in SUB_U.

Bos adds a second condition to 2.: "and if it is not the case that $SUB_U(l, h)$".

Hole Semantics (5)

Idea: set of labels and holes with SUB relation should be a join semi-lattice. I.e.,

- SUB is reflexive, transitive and antisymmetric (a partial order),
- for every two k, k'' there exists a least upper bound k'' such that $SUB(k, k'')$ and $SUB(k', k'')$.

Hole Semantics (6)

Exkurs: Verbände (lattices):

Eine partiell geordnete Menge $\langle A, \leq \rangle$ ist eine nichtleere Menge A mit einer Relation $\leq \subseteq (A \times A)$ ($\langle a, b \rangle \in \leq$ notieren wir $a \leq b$), so dass gilt:

P1 $a \leq a$ für alle $a \in A$ (Reflexivität)

P2 aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$ für alle $a, b \in A$ (Antisymmetrie)

P3 aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$ für alle $a, b, c \in A$ (Transitivität).

Bsp.: $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \{\{a, b\}, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle$ wobei $n \trianglelefteq m$ bedeutet, dass n Teiler von m ist

Hole Semantics (7)

Ein Verband (lattice) ist eine partiell geordnete Menge $\langle A, \leq \rangle$, für die zusätzlich für alle $a, b \in A$ gilt:

(sup) Es gibt ein $c \in A$, so dass $a \leq c$ und $b \leq c$ und so dass für all c' mit $a \leq c', b \leq c'$ gilt, dass $c \leq c'$. c heißt dann das Supremum von $\{a, b\}$.

(inf) Es gibt ein $c \in A$, so dass $c \leq a$ und $c \leq b$, und so dass für all c' mit $c' \leq a, c' \leq b$ gilt, dass $c' \leq c$. c heißt dann das Infimum von $\{a, b\}$.

Bsp.: $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \langle P(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle$ wobei $n \trianglelefteq m$ bedeutet, dass n Teiler von m ist

Ein Halbverband (join semi-lattice) ist eine partiell geordnete Menge $\langle A, \leq \rangle$, für die zusätzlich (sup) gilt.

Bsp.: $\langle \{\{a, b\}, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq \rangle$

Hole Semantics (8)

An UR U is proper iff for all $k, k' \in H_U \cup L_U$ there is a k'' such that $SUB_U(k, k'')$ and $SUB_U(k', k'')$.

A plugging P is a bijection from H_U to L_U.

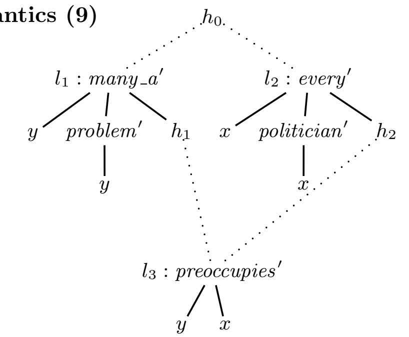
An UR U is consistent wrt a plugging P if it does not contain cycles once the plugging is applied:

For a plugging P, define $I_P(h) := P(h)$ for all holes, $I_P(l) := l$ for all labels.

$CONS_{U,P}$ iff for all k, k' such that $SUB(k, k')$, it is the case that eiher $I_P(k) = I_P(k')$, or $I_P(k) \neq I_P(k')$ and $SUB(k', k)$ is not supported.

Possible Pluggings: $PP_U := \{P \,|\, CONS_{P,U}\}$

Hole Semantics (9)



$PP_U = \{\{h_0 \to l_1, h_1 \to l_2, h_2 \to l_2\}, \{h_0 \to l_2, h_2 \to l_1, h_1 \to l_3\}\}$

How about $\{h_0 \to l_3, h_1 \to l_2, h_2 \to l_1\}$?

Hole Semantics (10)

Problem: consistency does not probibit cycles (as intended):

$h_1 \to l_1$ should not be possible. But condition $I(h_1) \neq I(l_1)$ is missing.

Alternative definition of consistency:

First, define a relation $SUB_{U,P} \in L_U \times L_U$ for an UR U and a plugging P:

For all labels l, holes h and all k, k' that are labels in U:

1. if there is a $l : \phi \in L$ and h is an argument of ϕ, then $SUB_{U,P}(P(h), l)$;
2. $SUB_{U,P}(l, l)$;
3. if there is a k'' with $SUB_{U,P}(k, k'')$ and $SUB_{U,P}(k'', k')$, then $SUB_{U,P}(k, k')$.
4. Nothing else is in $SUB_{U,P}$.

Hole Semantics (11)

$CONS_{U,P}$ iff $SUB_{U,P}$ satisfies the following constraints:

1. if there is a $l : \phi \in L$ and h is an argument of ϕ, then not $SUB_{U,P}(l, P(h))$;
2. $SUB_{U,P}$ is antisymmetric (no cycles), and
3. for all k, k' that are holes or labels: if there is a $k \leq k' \in C$, then $SUB_{U,P}(I_P(k), I_P(k'))$ (subordination constraints in C).

With this definition, the following pluggings are no longer possible in the preceding example:

- $h_1 \to l_1$ or $h_2 \to h_2$,
- $h_1 \to l_2, h_2 \to h_1$

Hole Semantics (12)

Das Top-Element einer UR U bzgl. eines Pluggings P ist wie folgt definiert:

$top_{U,P} = l$, so dass es kein l' gibt mit $l \neq l'$ und $SUB_{U,P}(l, l')$.

- Um U bzgl. P interpretieren zu können, wird gefordert, das $top_{U,P}$ eindeutig ist.
- Die Bedeutung von U bzgl. P ist dann $[[top_{U,P}]]$.
- Die Bedeutung von U ist $[[U]] = \{[[top_{U,P}]] \mid P$ ist ein mögliches Plugging für $U\}$

References

[Bos, 1995] Bos, J. (1995). Predicate logic unplugged. In Dekker, P. and Stokhof, M., editors, *Proceedings of the 10th Amsterdam Colloquium*, pages 133–142.