Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Algebren

Dozentin: Wiebke Petersen

5. Foliensatz

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Operationen (Verknüpfungen) f_i.

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

> Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation $\otimes$ abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.
>
> Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Operationen (Verknüpfungen) f_i.

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation $\otimes$ abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.

Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

An was erinnern Sie die beiden Axiome?

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Operationen (Verknüpfungen) f_i.

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

> Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation $\otimes$ abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.
>
> Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

An was erinnern Sie die beiden Axiome?

Alternative Definition: Eine Algebra **A** ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n-stelligen Funktionen $f_i : A^n \to A$.

Eigenschaften von Operationen

Assoziativgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist assoziativ, g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

Kommutativgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist kommutativ, g.d.w. für alle $a, b \in A$ gilt:

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Idempotenzgesetz

Eine Operation $\otimes$ auf A ist idempotent, g.d.w. für alle $a \in A$ gilt:

$$a \otimes a = a$$

Distributivgesetz

Für zwei Operationen $\oplus$ und $\otimes$ auf A distributiert $\oplus$ über $\otimes$, g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

neutrale und inverse Elemente

neutrales Element

Gegeben eine Operation $\oplus$ auf A. Ein Element $e \in A$ ist das neutrale Element von $\oplus$, g.d.w. für alle a in A gilt:

$$e \oplus a = a \oplus e = a.$$

inverses Element

Gegeben eine Operation $\oplus$ auf A mit neutralem Element e. Ein Element $a^{-1} \in A$ ist das inverse Element eines Elements $a \in A$, g.d.w.:

$$a^{-1} \oplus a = a \oplus a^{-1} = e$$

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks $((\triangle_D, \circ))$

Grundmenge: $\triangle_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen.

$\circ$	**id**	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
id			
$\curvearrowright$			
$\curvearrowleft$			

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von $\circ$:

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks $((\triangle_D, \circ))$

Grundmenge: $\triangle_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen.

$\circ$	**id**	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
id	id	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	id
$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	id	$\curvearrowright$

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von $\circ$:

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks $((\triangle_D, \circ))$

Grundmenge: $\triangle_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen.

$\circ$	**id**	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
id	id	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$
$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	id
$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	id	$\curvearrowright$

- neutrales Element: id
- inverse Elemente: $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$; $\curvearrowright^{-1} = \curvearrowleft$; $\curvearrowleft^{-1} = \curvearrowright$
- Eigenschaften von $\circ$: assoziativ, kommutativ

Bsp: Drehungen und vertikale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrows\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links, $\leftrightarrows$: vertikale Spiegelung)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Bsp: Drehungen und vertikale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrows\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links, $\leftrightarrows$: vertikale Spiegelung)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Diese Struktur bildet keine Algebra, da u.a. $\leftrightarrows \circ \curvearrowleft$ kein Element der Grundmenge ist (Verletzung der Abgeschlossenheit).

Bsp: Drehungen und vertikale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrows\}$
(id: 0°-Drehung; $\curvearrowright$: 120°-Drehung nach rechts; $\curvearrowleft$: 120°-Drehung nach links, $\leftrightarrows$: vertikale Spiegelung)
Operation: $\circ$ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Diese Struktur bildet keine Algebra, da u.a. $\leftrightarrows \circ \curvearrowleft$ kein Element der Grundmenge ist (Verletzung der Abgeschlossenheit).

Wenn man alle drei Spiegelungen entlang aller drei Spiegelachsen hinzunimmt, erhält man wieder eine Algebra.

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$
Operation: $\oplus_3$: Summe modulo 3

$\oplus_3$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$			
$[1]$			
$[2]$			

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von $\oplus_3$:

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$
Operation: $\oplus_3$: Summe modulo 3

$\oplus_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von $\oplus_3$:

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$
Operation: $\oplus_3$: Summe modulo 3

$\oplus_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

- neutrales Element: [0]
- inverse Elemente: $[0]^{-1} = [0]$; $[1]^{-1} = [2]$; $[2]^{-1} = [1]$
- Eigenschaften von $\oplus_3$: assoziativ, kommutativ

weitere Beispiele für Algebren

- $(\mathbb{N}_0, +)$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathscr{POT}(M), \cap, \cup)$
- $(\Sigma^*, \circ)$

Morphismen

Morphismus

Ein Morphismus ($\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$) von einer Algebra $\mathbf{A}$ in eine Algebra $\mathbf{B}$ ist eine Abbildung, die zum einen eine Funktion von der Menge der ersten in die Menge der zweiten Algebra definiert ($F : A \rightarrow B$), und zum anderen die Operationen der ersten Algebra auf die zweite Algebra projiziert (hierzu müssen beide Algebren gleichviele Operationen gleicher Stelligkeit haben).

Homomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ist ein Homomorphismus, g.d.w. für alle x, y in A gilt:

$$\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \oplus y) \text{ und}$$
$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x \otimes y)$$

Isomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ist ein Isomorphismus, g.d.w. $\varphi : A \to B$ bijektiv ist und wenn für alle x, y in A gilt:

$$\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \oplus y) \text{ und}$$
$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x \otimes y)$$

(Isomorphismen sind also bijektive Homomorphismen)

Zwei Algebren sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Automorphismus

Ein Automorphismus einer Algebra $\mathbf{A}$ ist ein Isomorphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Beispiele

- $\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(n) = n \mod 3$ ist ein
- $\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\{a\}^*, \circ)$ mit $\varphi(n) = a^n$ ist ein .
- $\varphi : (\triangle_D, \circ) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(\mathrm{id}) = [0]$, $\varphi(\curvearrowright) = [1]$, $\varphi(\curvearrowleft) = [2]$ ist ein .

Beispiele

- $\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(n) = n \mod 3$ ist ein Homomorphismus, aber kein Isomorphismus
- $\varphi : (\mathbb{N}_0, +) \to (\{a\}^*, \circ)$ mit $\varphi(n) = a^n$ ist ein Isomorphismus.
- $\varphi : (\triangle_D, \circ) \to (\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(\mathrm{id}) = [0]$, $\varphi(\curvearrowright) = [1]$, $\varphi(\curvearrowleft) = [2]$ ist ein Isomorphismus.

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine Semigruppe (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation $\otimes$, die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine Semigruppe (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation $\otimes$, die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

Monoid

Ein Monoid $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine Semigruppe (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation $\otimes$, die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

Monoid

Ein Monoid $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

Gruppe

Eine Gruppe $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

G3 jedes Element aus G hat ein inverses Element in G.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, +)$ ist
- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist
- $(\mathscr{POT}(M), \cup)$ ist
- $(\Sigma^*, \circ)$ ist
- $(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ ist
- $(\triangle_D, \circ)$ ist

Beispiele

- $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Semigruppe
- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist ein Monoid
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe
- $(\mathscr{POT}(M), \cup)$ ist ein Monoid
- $(\Sigma^*, \circ)$ ist ein Monoid
- $(\mathbb{N} \mod 3, \oplus_3)$ ist eine Gruppe
- $(\triangle_D, \circ)$ ist eine Gruppe

Verbände

Verband: algebraische Definition

Ein Verband $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen $\vee$ und $\wedge$, die folgende Bedingungen erfüllen:

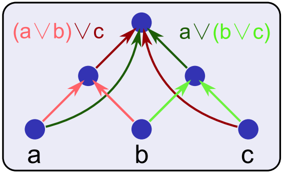
- Kommutativgesetze: $a \vee b = b \vee a$ und $a \wedge b = b \wedge a$
- Assoziativgesetze: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ und $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Idempotenzgesetze: $a \vee a = a$ und $a \wedge a = a$
- Absorptionsgesetze: $a \vee (a \wedge b) = a$ und $a \wedge (a \vee b) = a$

Verbände

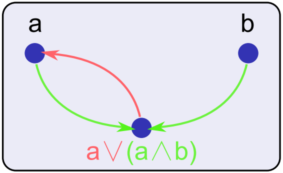
Verband: algebraische Definition

Ein Verband $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen $\vee$ und $\wedge$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Kommutativgesetze: $a \vee b = b \vee a$ und $a \wedge b = b \wedge a$
- Assoziativgesetze: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ und $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Idempotenzgesetze: $a \vee a = a$ und $a \wedge a = a$
- Absorptionsgesetze: $a \vee (a \wedge b) = a$ und $a \wedge (a \vee b) = a$



$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$



$a \vee (a \wedge b) = a$

Verbände

Zusammenhang algebraischer und ordnungstheoretischer Verband

(i) $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ sei ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband. Setze $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ und $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein (algebraisch definierter) Verband.

(ii) $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ sei ein (algebraisch definierter) Verband. Setze $a \trianglelefteq b$ g.d.w. $a \wedge b = a$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband.

Beispiel: $(\mathscr{POT}(M), \subseteq)$ und $(\mathscr{POT}(M), \cup, \cap)$