Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Relationen und Funktionen

Dozentin: Wiebke Petersen

2. Foliensatz

n-Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n-Tupel

Ein n-Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.
Beispiel: $\langle 2,3,1 \rangle$, $\langle b,e,e,s,i,i,p,l \rangle$
2-Tupel werden auch (geordnete) Paare genannt.

n-Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n-Tupel

Ein n-Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.
Beispiel: $\langle 2,3,1\rangle$, $\langle b,e,e,s,i,i,p,l\rangle$
2-Tupel werden auch (geordnete) Paare genannt.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \ldots M_n$ ist die Menge aller n-Tupel deren i-tes Element aus M_i stammt.
$M_1 \times \ldots \times M_n := \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$

Statt $M \times M \times \ldots \times M$ schreibt man auch M^n, wenn M genau n-mal auftritt.

n-Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n-Tupel

Ein n-Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.
Beispiel: $\langle 2,3,1 \rangle$, $\langle b,e,e,s,i,i,p,l \rangle$
2-Tupel werden auch (geordnete) Paare genannt.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n-Tupel deren i-tes Element aus M_i stammt.
$M_1 \times \dots \times M_n := \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$

Statt $M \times M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n, wenn M genau n-mal auftritt.

Beispiel

$M_1 = \{a,b,c\}$, $M_2 = \{a,d\}$
$M_1 \times M_2 = \{\langle a,a \rangle, \langle a,d \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,d \rangle, \langle c,a \rangle, \langle c,d \rangle\}$
$M_1 \times \emptyset =$

n-Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n-Tupel

Ein n-Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.
Beispiel: $\langle 2,3,1 \rangle$, $\langle b,e,e,s,i,i,p,l \rangle$
2-Tupel werden auch (geordnete) Paare genannt.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n-Tupel deren i-tes Element aus M_i stammt.
$M_1 \times \dots \times M_n := \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$

Statt $M \times M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n, wenn M genau n-mal auftritt.

Beispiel

$M_1 = \{a,b,c\}$, $M_2 = \{a,d\}$
$M_1 \times M_2 = \{\langle a,a \rangle, \langle a,d \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,d \rangle, \langle c,a \rangle, \langle c,d \rangle\}$
$M_1 \times \emptyset = \emptyset$

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt n-stellige Relation.
Eine Relation R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt n-stellige Relation.
Eine Relation R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Hinweis: Relationen werden extensional definiert. Es ist unerheblich, wie die Relation charakterisiert (oder benannt) wird. Wichtig ist allein, welche Objekte zueinander in der Relation stehen.
Für Relationen werden häufig die Buchstaben R, S, T verwendet.

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt n-stellige Relation.
Eine Relation R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Hinweis: Relationen werden extensional definiert. Es ist unerheblich, wie die Relation charakterisiert (oder benannt) wird. Wichtig ist allein, welche Objekte zueinander in der Relation stehen.
Für Relationen werden häufig die Buchstaben R, S, T verwendet.

Beispiele

- Schwester von
- Mutter von
- weibliches Elternteil von
- bilden ein Quartet
- Teilmenge von

binäre Relationen

- binäre Relationen sind Mengen geordneter Paare
- wenn a in der Relation R zu b steht, dann schreibt man
  - $\langle a, b\rangle \in R$ oder
  - aRb oder
  - $R(a, b)$ oder
  - Rab
- Wenn $R \subseteq A \times B$, dann sagt man, dass R eine Relation zwischen A und B ist.
- Wenn $R \subseteq A \times A$, dann sagt man, dass R eine Relation auf A ist.

Frage

Denken Sie sich möglichst viele binäre Relationen aus.

1 Minute zum Nachdenken und Diskutieren

inverse und komplementäre Relation

inverse Relation

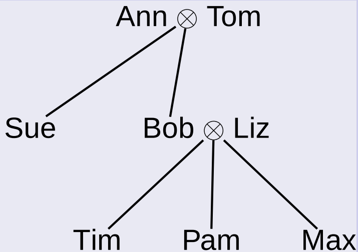
Die inverse Relation zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ ist die Relation
$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \in B \times A | \langle a, b\rangle \in R\}$.

komplementäre Relation

Die komplementäre Relation zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen A und B ist die Relation
$R' = A \times B \setminus R$.

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie

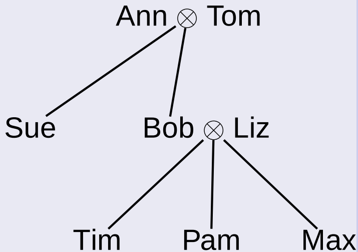


‚hat als Sohn'

Ann	R_{son}	Bob
Tom	R_{son}	Bob
Bob	R_{son}	Max
Bob	R_{son}	Tim
Liz	R_{son}	Max
Liz	R_{son}	Tim

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie



‚hat als Mutter'

Sue	R_{mother}	Ann
Bob	R_{mother}	Ann
Tim	R_{mother}	Liz
Pam	R_{mother}	Liz
Max	R_{mother}	Liz

Frage

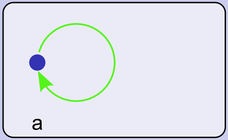
Können Sie die komplementären und die inversen Relationen Ihrer Beispielrelationen benennen?

1 Minute zum Nachdenken und Diskutieren

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

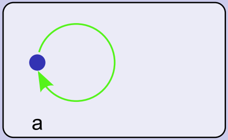
R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



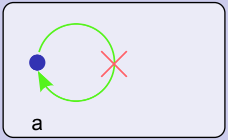
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



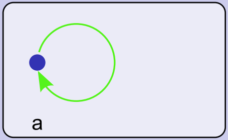
R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa



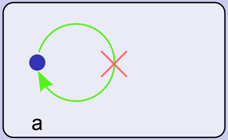
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa

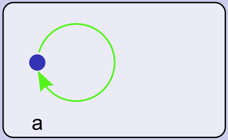


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag' auf der Menge der Menschen ist reflexiv.

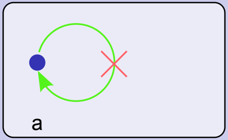
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa

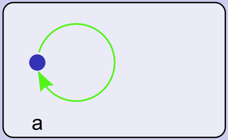


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag' auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von' auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.

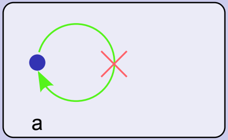
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa

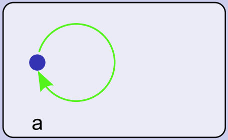


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag' auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von' auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.
- Die Relation ‚kann die Quersumme des Geburtstags von berechnen' auf der Menge der Menschen ist weder reflexiv noch irreflexiv.

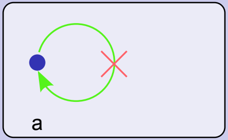
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist reflexiv g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa.



R ist irreflexiv g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa

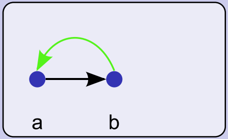


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag' auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von' auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.
- Die Relation ‚kann die Quersumme des Geburtstags von berechnen' auf der Menge der Menschen ist weder reflexiv noch irreflexiv.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

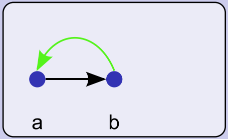
R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



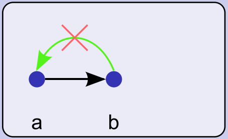
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



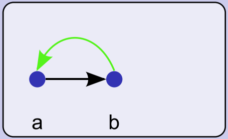
R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



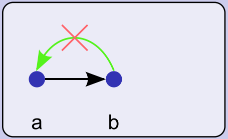
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.

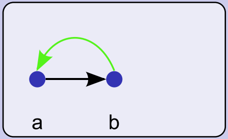


R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

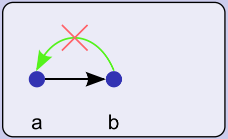
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



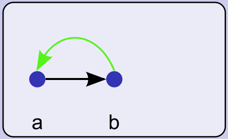
R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit' ist symmetrisch.

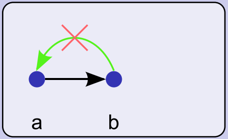
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



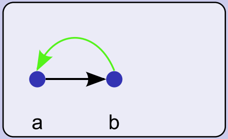
R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit' ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als' ist asymmetrisch.

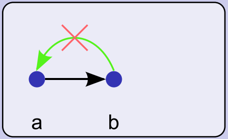
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



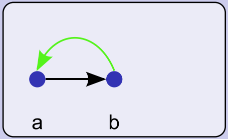
R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit' ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als' ist asymmetrisch.
- Die Relation ‚ist Teilmenge von ' ist antisymmetrisch.

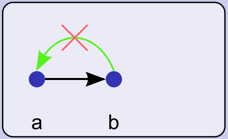
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist symmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist asymmetrisch g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



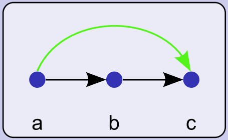
R ist antisymmetrisch g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit' ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als' ist asymmetrisch.
- Die Relation ‚ist Teilmenge von ' ist antisymmetrisch.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

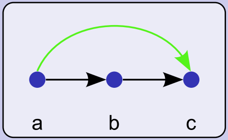
R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



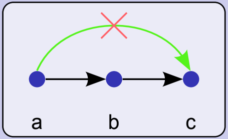
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



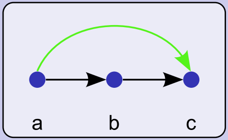
R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.



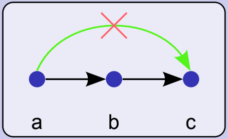
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

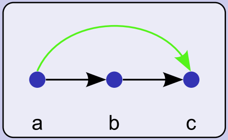


- Die Relation ‚ist Vorfahr von' ist transitiv.

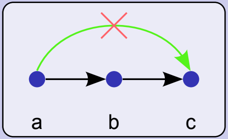
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

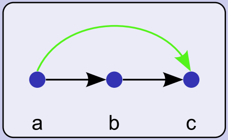


- Die Relation ‚ist Vorfahr von' ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als' ist intransitiv.

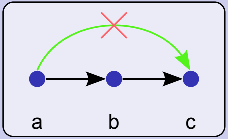
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

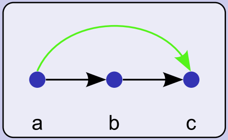


- Die Relation ‚ist Vorfahr von' ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als' ist intransitiv.
- Die Relation ‚kennt' ist weder transitiv noch intransitiv.

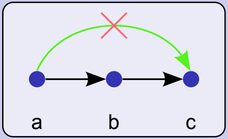
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

R ist transitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist intransitiv g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.



- Die Relation ‚ist Vorfahr von' ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als' ist intransitiv.
- Die Relation ‚kennt' ist weder transitiv noch intransitiv.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Definitions- und Wertebereich einer Relation

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation ist, dann heißt

$$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

der Definitionsbereich (domain) von R.
Die Menge

$$\text{rng}(R) = \{b \in B \mid \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

heißt der Wertebereich (range) von R.

Definitions- und Wertebereich einer Relation

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation ist, dann heißt

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \in A \mid \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

der Definitionsbereich (domain) von R.
Die Menge

$$\mathrm{rng}(R) = \{b \in B \mid \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

heißt der Wertebereich (range) von R.

Beispiel:

$$A = \{a,b,c,d\},\ B = \{1,2,3,4,5\},\ R = \{(b,1),(b,2),(c,3)\}$$

$$\mathrm{dom}(R) = \{b,c\},\ \mathrm{rng}(R) = \{1,2,3\}$$

Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation auf A, g.d.w. R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wenn R eine Äquivalenzrelation ist und aRb gilt, dann sagt man, dass a äquivalent ist zu b bezüglich R.

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Symbol $\sim$.

Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation auf A, g.d.w. R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wenn R eine Äquivalenzrelation ist und aRb gilt, dann sagt man, dass a äquivalent ist zu b bezüglich R.

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Symbol $\sim$.

Beispiele:

- Gleichheit
- ist im selben Semester wie
- hat gleich viele Elemente wie
- hat die selbe Farbe wie
- Welche der Beispielrelationen an der Tafel sind Äquivalenzrelationen?

Äquivalenzrelation

Äquivalenzklasse

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Die Äquivalenzklasse eines Elements $a \in A$ ist die Menge aller zu a äquivalenten Elemente von A, also

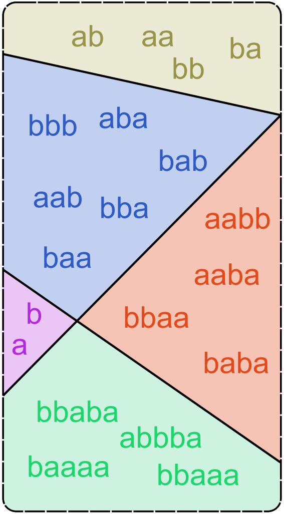
$$[a]_R = \{b \in A | aRb\}.$$

Die Menge

$$A/R = \{[a]_R | a \in A\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus A bezüglich R heißt Quotient von A bezüglich R.

Hinweis: Äquivalenzklassen können per Definition nicht leer sein.



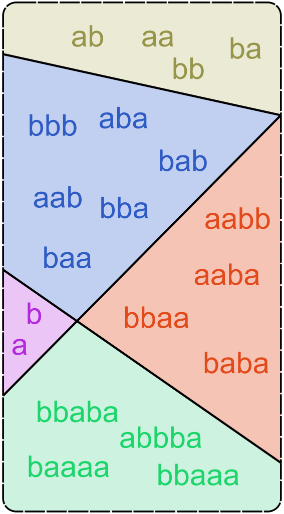
Äquivalenzrelation

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Dann gilt:

- Zwei Äquivalenzklassen von R sind entweder disjunkt oder identisch: für alle $a, b \in A$ gilt entweder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ oder $[a]_R = [b]_R$.
- Die Äquivalenzklassen von R decken ganz A ab: $\bigcup A/R = A$.

Eine Menge $P \subseteq \mathscr{POT}(A)$ ist eine Partition (oder disjunkte Zerlegung) von A, g.d.w. $\bigcup P = A$ und für alle $X, Y \in P$ mit $X \neq Y$ gilt $X \cap Y = \emptyset$.

Folglich bildet der Quotient einer Äquivalenzrelation eine Partition der Grundmenge.



Funktionen

Definition

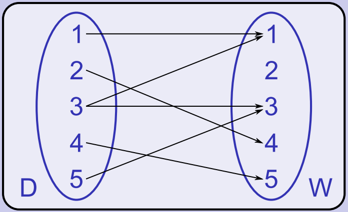
Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine Funktion (oder Abbildung), wenn sie jedem Element aus D genau ein Element aus W zuordnet.
Funktionen müssen also die Bedigungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ *ist eine Funktion (oder Abbildung), wenn sie jedem Element aus* D *genau ein Element aus* W *zuordnet.*
Funktionen müssen also die Bedigungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

*Existenz: Für **jedes*** $x \in D$ *gibt es ein* $y \in W$ *mit* $\langle x, y \rangle \in R$.



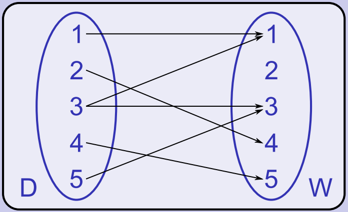
Funktionen

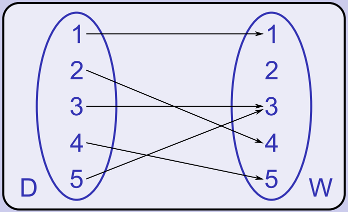
Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine Funktion (oder Abbildung), wenn sie jedem Element aus D genau ein Element aus W zuordnet.
Funktionen müssen also die Bedigungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

*Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y \rangle \in R$.*

Eindeutigkeit: Wenn $\langle x, y \rangle \in R$ und $\langle x, z \rangle \in R$, dann $y = z$.





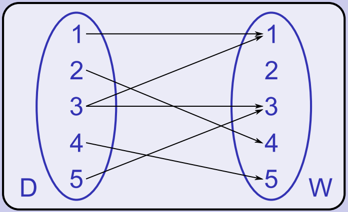
Funktionen

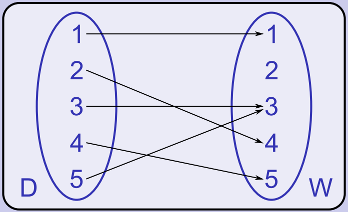
Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine Funktion (oder Abbildung), wenn sie jedem Element aus D genau ein Element aus W zuordnet.
Funktionen müssen also die Bedigungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

*Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y \rangle \in R$.*

Eindeutigkeit: Wenn $\langle x, y \rangle \in R$ und $\langle x, z \rangle \in R$, dann $y = z$.





Eine Relation, für die die Eindeutigkeitsbedingung (aber nicht unbedingt die Existenzbedingung) gilt, heißt partielle Funktion.

Notation und Terminologie

- Für Funktionen verwendet man häufig die Buchstaben f, g, h, F, G, H.
- Wenn $f \subseteq A \times B$ eine Funktion ist, dann sagt man, dass f eine Funktion von A nach B ist, und schreibt $f : A \to B$. A wird dann der Definitionsbereich und B der Wertebereich von f genannt.
- Wenn $\langle a, b \rangle \in f$, dann sagt man, dass die Funktion f dem Element a den Wert b zuweist, und schreibt $f(a) = b$ oder $f : a \mapsto b$.
- Elemente des Definitionsbereiches heißen Argumente und Elemente des Wertebereiches heißen Werte einer Funktion.
- Wenn $C \subset A$ und $f : A \to B$, dann bezeichnet $f|_C : C \to B$ die Einschränkung der Funktion f auf C. Für alle $c \in C$ gilt $f|_C(c) = f(c)$.
- Im Kontext von partiellen Funktionen werden Funktionen, die die Existenzbedingung erfüllen, häufig totale Funktionen genannt.

Beispiele

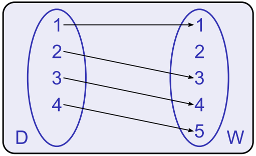
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ ist keine partielle Funktion.
- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine partielle aber keine totale Funktion.
- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine totale und folglich auch eine partielle Funktion.

Funktionseigenschaften

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion.

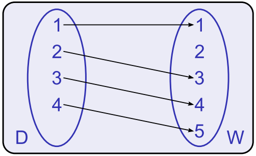
f ist injektiv (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
$f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



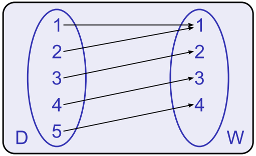
Funktionseigenschaften

Sei $f : D \to W$ eine Funktion.

f ist injektiv (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
$f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



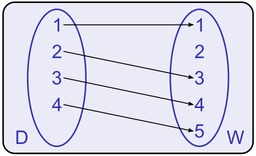
f ist surjektiv (Engl.: onto), wenn jedes Element von W mindestens einem Element von D als Wert zugewiesen wird. Wenn es also für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt.



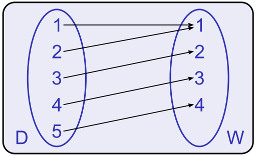
Funktionseigenschaften

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion.

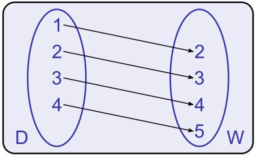
f ist injektiv (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
$f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



f ist surjektiv (Engl.: onto), wenn jedes Element von W mindestens einem Element von D als Wert zugewiesen wird. Wenn es also für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt.

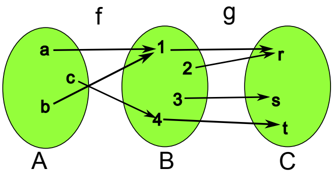


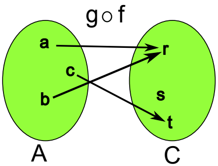
f ist bijektiv, wenn f *injektiv* **und** *surjektiv* ist.
Merke: Eine Funktion f ist bijektiv, g.d.w. f^{-1} eine Funktion ist.



Komposition von Funktionen

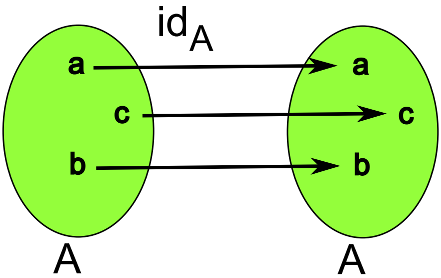
Seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ zwei Funktionen. Die Funktion $g \circ f: A \to C$ mit $g \circ f = \{(x,z) \in A \times C \mid \text{ es gibt ein } y \in B \text{ mit } (x,y) \in f \text{ und } (y,z) \in g\}$ ist die Komposition (oder Verkettung) von f und g.
Es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Die Funktion $g \circ f$ weist einem Element $x \in A$ das Element aus C zu, das man erhält, wenn man zunächst f auf x anwendet und auf das Ergebnis noch g anwendet.





Identitätsfunktion

Die Funktion $id_A : A \rightarrow A$ mit $f = \{(a,a) \in A \times A\}$ (oder $f(a) = a$ für alle $a \in A$) heißt die Identität(sfunktion) auf A.



mehrstellige Funktionen

- Der Definitionsbereich einer Funktion kann selbst eine Relation sein.
- Eine Funktion $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ heißt n-stellige Funktion.
- Beispiel: Die Addition der natürlichen Zahlen $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ kann als zweistellige Funktion aufgefasst werden.
- Zweistellige Operationen bilden zweistellige Funktionen (Bsp.: Schnitt, Vereinigung, . . .).
- n-stellige Funktionen sind $n+1$-stellige Relationen (Bsp: Mutter)

Charakteristische Funktion einer Teilmenge

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ lässt sich mithilfe ihrer charakteristischen Funktion beschreiben.
Die charakteristische Funktion einer Teilmenge $N \subseteq M$ ist die Funktion $\chi : M \to \{0,1\}$, für die gilt: $\chi(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in N$.
Für die charakteristische Funktion von $N \subseteq M$ schreibt man häufig auch χ_N.
Es gilt:

$$\chi_N : M \to \{0,1\}; \quad \chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} x \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mengen von Funktionen

Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Funktionen von N nach M. Also:

$$M^N = \{f : N \rightarrow M \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

Charakteristische Funktion und Potenzmenge

Wir haben gesehen, dass man für die Potenzmenge einer Menge M auch 2^M schreiben kann. Warum?

Charakteristische Funktion und Potenzmenge

Wir haben gesehen, dass man für die Potenzmenge einer Menge M auch 2^M schreiben kann. Warum?
In 2^M steht 2 für die 2-elementige Menge $\{0,1\}$.
Die Potenzmenge einer Menge M lässt sich als Menge aller charakteristischen Funktionen ihrer Teilmengen auffassen:

$$\mathscr{POT}(M) = 2^M = \{f : M \to \{0,1\} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1