Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Lineare Algebra

Dozentin: Wiebke Petersen

10. Foliensatz

Einleitung

Die lineare Algebra beschäftigt sich mit

- Vektorräumen
- linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen
- linearen Gleichungssystemen
- Matrizen

Gruppen (Wiederholung)

Eine Gruppe $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine algebraische Struktur mit:

G1 $\otimes$ ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

G3 jedes Element aus G hat ein inverses Element in G.

$\mathbf{G}$ heißt abelsche Gruppe, wenn die Verknüpfung $\otimes$ kommutativ ist.

Körper

Ein Körper $\mathbf{K} = (K, +, \cdot)$ ist eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen $+ : K \times K \to K$ (Addition) und $\cdot : K \times K \to K$ (Multiplikation:

K1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
Das neutrale Element der Addition wird mit 0 bezeichnet und das zu a inverse Element mit $-a$.

K2 Die Multiplikation lässt sich auf $K \setminus \{0\}$ beschränken (für $a, b \in K \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot b \in K \setminus \{0\}$), und $K \setminus \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation bildet eine abelsche Gruppe.
Das neutrale Element der Multiplikation wird mit 1 bezeichnet und das zu $a \in K \setminus \{0\}$ inverse Element mit a^{-1}.

K3 Es gelten die folgenden Distributivgesetze:
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ und $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Körper: Anmerkungen und Beispiele

- Statt $a \cdot b$ schreibt man zumeist ab.
- Per Konvention bindet die Multiplikation stärker als die Addition, es gilt also
  $(ab) + c = ab + c$.
- Statt $a + (-b)$ schreibt man zumeist $a - b$.
- Es gelten folgende Zusammenhänge (versuchen sie die Aussagen zu beweisen):
  - $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$.
  - Ist $ab = 0$ so gilt $a = 0$ oder $b = 0$.
  - Für alle $a, b \in K$ gilt $a(-b) = (-a)b = -(ab)$. Außerdem gilt $(-a)(-b) = ab$.

Beispiele:

- $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- Aber $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

Vektorraum

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend

- aus einer Menge V
- einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ (Vektoraddition) und einer
- einer Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$ (skalare Multiplikation)

So dass folgendes gilt:

V1 $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe (auch abelsche Gruppe). Das neutrale Element 0 heißt Nullvektor und das zu $v \in V$ inverse Element $-v$ heißt der zu v negative Vektor

V2 für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

- $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
- $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
- $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- $1 \cdot v = v$.

Die Elemente von V nennt man Vektoren, die von K Skalare.

Vektorraum: Anmerkungen

- Statt $\lambda \cdot v$ mit $\lambda \in K$ und $v \in V$ schreibt man zumeist λv
- Per Konvention bindet die skalare Multiplikation stärker als die Addition in V und die Addition in K, also $\lambda v + w = (\lambda v) + w$
- In jedem K-Vektorraum gilt:
  - $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$
  - $\lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in K$
  - Wenn $\lambda \in K$ und $v \in V$ und $\lambda v = 0$, dann gilt $\lambda = 0$ oder $v = 0$.
  - $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Können sie diese Aussagen beweisen?

Beweise einiger Eigenschaften von K-Vektorräumen

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

- Aussage: $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$
  Beweis: es gilt $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ und $0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$. Daraus folgt $0 \cdot v = 0$. $\square$
- Aussage: $\lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in K$
  Beweis: es gilt $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ und $\lambda \cdot 0 + 0 = \lambda \cdot 0$. Daraus folgt $\lambda \cdot 0 = 0$. $\square$
- Aussage: Wenn $\lambda \in K$ und $v \in V$ und $\lambda \cdot v = 0$, dann gilt $\lambda = 0$ oder $v = 0$.
  Beweis durch Fallunterscheidung: 1. Fall: Wenn $\lambda = 0$ und $\lambda \cdot v = 0$ dann folgt die Aussage direkt. 2. Fall: Wenn $\lambda \neq 0$ und $\lambda \cdot v = 0$, dann gilt $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \lambda^{-1}(\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$. $\square$
- Aussage: $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.
  Beweis: aus $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ folgt $(-1) \cdot v = -v$. $\square$

Vektorraum Beispiel: Vektorraum der Funktionen

Setzt man $K = \mathbb{R}$ und $V = \{f \mid f \text{ ist eine Funktion mit } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, dann bildet $(V, +, \cdot)$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit

- Vektoraddition $V \times V \to V$:
  $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$:
  $(\lambda \cdot f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

Vektorraum Beispiel: Koordinatenraum oder Raum der geordneten n-Tupel

Ist K ein Körper und $n \in \mathbf{N}$, so bildet das n-fache kartesische Produkt $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$ die Menge aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit Komponenten aus K. $(K^n, +)$ bildet einen K-Vektorraum mit

- Vektoraddition $+ : K^n \times K^n \to K^n$ definiert durch

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- und skalare Multiplikation $\cdot : K \times K^n \to K^n$ definiert durch

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$$

Der Vektorraum $(K^n, +)$ wird auch als Koordinatenraum der Dimension n oder als Raum der geordneten n-Tupel bezeichnet.

Vektoren in Koordinatenräumen

Koordinatenvektoren notiert man häufig als Spaltenvektoren. Für das Tupel $(x_1, \dots x_n)$ schreibt man dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Für die Vektoraddition gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und für die skalare Multiplikation gilt

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

Für $v = (v_1, \ldots v_n)$ und $w = (w_1, \ldots w_n)$ mit $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ definiert als

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots v_n w_n.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Die Länge oder Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Die Distanz zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(v, w) = \|w - v\|$$

Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Winkel

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\theta = \sphericalangle(v, w)$ der Winkel zwischen v und w, dann gilt

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos(\theta)$$

Für den Beweis benötigt man den Kosinussatz (`https://de.wikipedia.org/wiki/Kosinussatz`): Seien a, b, c die Seiten eines Winkels und γ der der Seite c gegenüberliegende Winkel, dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Vektorraum Beispiel: Matrizenraum (1)

Ein rechteckiges Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

von Elementen a_{ij} aus einem Körper K heißt Matrix. Die Elemente a_{ij} heißen Komponenten der Matrix. Man spricht von den Zeilen und Spalten einer Matrix. Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten heißt $m \times n$-Matrix (lese: m Kreuz n Matrix).

Vektorraum Beispiel: Matrizenraum (2)

Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$K^{m\times n} = \{(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \mid a_{ij} \in K\}$$

die Menge der Matrizen der Größe $m \times n$ mit Komponenten aus K. $K^{m\times n}$ bildet mit der folgenden Vektoraddition und skalaren Multiplikation einen K-Vektorraum:

- Vektor- oder besser Matrizenaddition:
  $+ : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K^{m\times n}$ mit $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
- Multiplikation mit einem Skalar:
  $\cdot : K \times K^{m\times n} \to K^{m\times n}$ mit $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$.

Der Vektorraum $(K^{m\times n}, +, \cdot)$ wird auch der Matrizenraum oder Raum der Matrizen der Größe $m \times n$ über dem Körper K genannt.

Die Vektorraumeigenschaften von $(K^{m\times n}, +, \cdot)$ folgen unmittelbar aus den Vektorraumeigenschaften von $(K^n, +, \cdot)$. Das neutrale Element der Matrizenaddition ist die Matrix (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j. Die zu $(a_{ij}$ additiv inverse Matrix ist $(-a_{ij})$.

Beispiel: Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalar

Sei im folgenden $K = \mathbb{R}$.

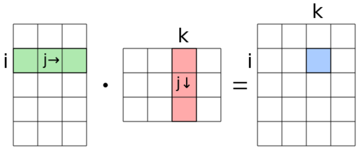
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+3 & 4-2 \\ 0+2 & 1+0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Die Matrizenmultiplikation ist die Operation $\cdot K^{m\times p} \times K^{p\times n} \to K^{m\times n}$ mit $A \cdot B = C$ und

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$$



Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix

Die Transponierte einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $n \times m$-Matrix $A^T = (a_{ji})$. Also

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Aussagen:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Beispiele: Matrizenmultiplikation

Zusammenhang zwischen Skalarprodukt von Vektoren und Matrizenmultiplikation:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 2$$

Multiplikation einer Matrix und eines Vektors

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\\12\end{pmatrix}$$