Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Beweisverfahren

Dozentin: Wiebke Petersen

9. Foliensatz

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.
- Wegen der Transitivität der Ordnungsrelation $>$ folgt aus $n > 7$ und $7 > 5$, dass $n > 5$.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.
- Wegen der Transitivität der Ordnungsrelation $>$ folgt aus $n > 7$ und $7 > 5$, dass $n > 5$.
- Somit folgt, dass jede Zahl, die größer als 7 ist auch größer als 5 ist.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathscr{POT}(M)| = \left|\left\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\right\}\right|$.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathscr{POT}(M)| = \left|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\right|$.
- $\left|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\right|$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit 2 Elementen n-mal mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ein Element zu ziehen.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathscr{POT}(M)| = \left|\left\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\right\}\right|$.
- $\left|\left\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\right\}\right|$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit 2 Elementen n-mal mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ein Element zu ziehen.
- Hierfür ist die Anzahl bekannt, nämlich 2^n.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

- Wenn man nun die Spalten zusammenrechnet, so erhält man für jede Spalte $n+1$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

- Wenn man nun die Spalten zusammenrechnet, so erhält man für jede Spalte $n+1$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

- Die Werte in der letzten Zeile zusammengezählt ergeben $n\cdot(n+1)$. Da in der letzten Zeile spaltenweise die beiden oberen Zeilen addiert worden sind, gilt:

$$2\cdot\sum_{i=1}^{i=n} i = n\cdot(n+1) \text{ folglich gilt: } \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist
$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$
ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist
$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$
ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.
- Zusätzlich muss aber auch $p > p_n$ gelten, woraus folgt, dass p keine Primzahl ist, da p größer als die größte Primzahl ist.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist
$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$
ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.
- Zusätzlich muss aber auch $p > p_n$ gelten, woraus folgt, dass p keine Primzahl ist, da p größer als die größte Primzahl ist.
- Dies führt zu einem Widerspruch, da die Aussagen "p ist eine Primzahl" und "p ist keine Primzahl" nicht beide zugleich wahr sein können.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Die Potenzmenge $\mathscr{POT}(M)$ einer Menge M ist immer mächtiger als die Menge selbst.

1. $\mathscr{POT}(M)$ ist mindestens so mächtig wie M, da die Menge der Einermengen $\{\{m\} : m \in M\}$ genauso mächtig ist wie M und eine echte Teilmenge von $\mathscr{POT}(M)$ ist.
2. Über das Diagonalverfahren zeigt man, dass die Annahme, $\mathscr{POT}(M)$ und M seien gleichmächtig, zu einem Widerspruch führt.
3. Aus 1 und 2 folgt, daß $\mathscr{POT}(M)$ mächtiger als M sein muss.

Beweis durch Gegenbeispiel

Um die Falschheit einer Aussage zu zeigen, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben.

Satz

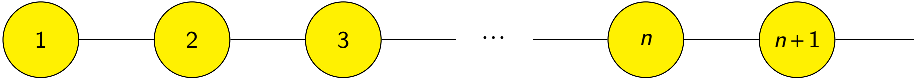
Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist nicht notwendig leer.

Wir zeigen dass die Aussage: "Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist immer leer" falsch ist.
Gegenbeispiel: Wenn $A = \{1,2\}$ und $B = \{1\}$, dann $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$.

Beweis durch vollständige Induktion

In einem vollständigen Induktionsbeweis macht man sich eine besondere Eigenschaft der Menge der natürlichen Zahlen zunutze: Ausgehend von der Zahl 1 kann jede natürliche Zahl durch wiederholtes Anwenden der Nachfolgefunktion ($f(n) = n+1$) erreicht werden.

- Man zeigt zunächst, dass die zu beweisende Aussage für $n = 1$ gilt.
- Dann zeigt man, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$.
- Wenn die Aussage für $n = 1$ gilt und wenn außerdem aus der Gültigkeit der Aussage für n auch die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ folgt, so folgt, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$*. Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen ist $S(n)+(n+1)$. Es folgt:

$$S(n)+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen ist $S(n)+(n+1)$. Es folgt:

$$S(n)+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

Also gilt die Aussage für $(n+1)$ immer dann, wenn sie für n gilt. Da sie für $n=1$ gilt, folgt aus der Definition der natürlichen Zahlen und dem Induktionsschluss, dass sie für alle natürlichen Zahlen gelten muss.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1) = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2n-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n) = n^2$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1)=n^2$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n)=n^2$.
Die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen ist $U(n)+(2(n+1)-1)$, da $2(n+1)-1$ die $(n+1)$-te ungerade Zahl ist. Es folgt:

$$U(n)+(2(n+1)-1)=n^2+2(n+1)-1=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2n-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n=1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2=1$ gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n)=n^2$.
Die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen ist $U(n)+(2(n+1)-1)$, da $2(n+1)-1$ die $(n+1)$-te ungerade Zahl ist. Es folgt:

$$U(n)+(2(n+1)-1) = n^2+2(n+1)-1 = n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Also gilt die Aussage für $(n+1)$ immer dann, wenn sie für n gilt. Da sie für $n=1$ gilt, folgt aus der Definition der natürlichen Zahlen und dem Induktionsschluss, dass sie für alle natürlichen Zahlen gelten muss.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.
Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n-k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.

Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n-k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.

Allerdings kann jede der neuen, vergrößerten Teilmengen mit $k+1$ Elementen insgesamt auf $k+1$ Arten aus einer k-elementigen Teilmenge durch Hinzunahme eines weiteren Elements entstanden sein.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.

Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n-k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.

Allerdings kann jede der neuen, vergrößerten Teilmengen mit $k+1$ Elementen insgesamt auf $k+1$ Arten aus einer k-elementigen Teilmenge durch Hinzunahme eines weiteren Elements entstanden sein.

Es gibt also $\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$ k-elementige Teilmengen zu einer beliebigen n-elementigen Menge.

Also gilt $$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)! \cdot (k+1)} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} = \binom{n}{k+1}$$