Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Bäume

Dozentin: Wiebke Petersen

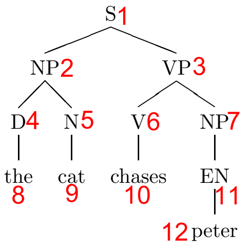
6. Foliensatz
(basierend auf Folien von Gerhard Jäger)

Bäume

Baumdiagramme

Ein Baumdiagramm eines Satzes stellt drei Arten von Information dar:

- die Konstituentenstruktur des Satzes,
- die grammatische Kategorie jeder Konstituente, sowie
- die lineare Anordnung der Konstituenten.



Bäume

Konventionen

- Ein Baum besteht aus Knoten, die durch
- Kanten verbunden werden.
- Kanten sind implizit von oben nach unten gerichtet (ähnlich zu Hasse-Diagrammen, wo die implizite Richtung aber von unten nach oben ist.)
- Jeder Knoten ist mit einem Etikett (engl. label) versehen.

Bäume

Dominanz

- Ein Knoten x dominiert Knoten y genau dann, wenn es eine zusammenhängende (möglicherweise leere) Sequenz von abwärts gerichteten Ästen gibt, die mit x beginnt und mit y endet.
- Für einen Baum T bildet

$$D_T = \{\langle x, y\rangle | x \text{ dominiert } y \text{ in } T\}$$

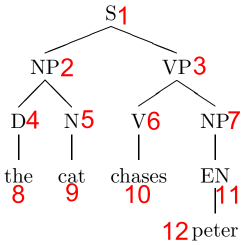
  die zugehörige Dominanz-Relation.
- D_T ist eine schwache Ordnung, also reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

Bäume

Konventionen

- Wenn x bzgl. D_T der unmittelbare Vorgänger von y ist, dann dominiert x y unmittelbar.
- Der unmittelbare Vorgänger von x bzgl. D_T heißt der Mutterknoten von x.
- Die unmittelbaren Nachfolger von x heißen Tochterknoten von x.
- Wenn zwei Knoten nicht identisch sind, aber den selben Mutterknoten haben, heißen sie Schwesterknoten.
- Jeder Baum hat endlich viele Knoten.
- Jeder Baum hat ein Infimum bezüglich der Ordnung D_T. Das Infimum heißt Wurzel oder Wurzelknoten des Baums und dominiert alle anderen Knoten. Vorsicht: Die Baumdiagramme sind auf den Kopf gestellte Hasse-Diagramme (die Wurzel ist der oberste Knoten des Baumdiagramms, also der Knoten, der als einziges keinen Mutterknoten hat)
- Die maximalen Elemente eines Baumes heißen Blätter. Blätter stehen in einem Baumdiagramm ganz unten. Blätter sind diejenigen Knoten, die keine Töchter haben.

Beispiel



- Knoten 2 dominiert Knoten 8 ($\langle 2,8\rangle \in D_T$)
- Knoten 2 dominiert Knoten 5 unmittelbar
- Knoten 2 dominiert Knoten 2
- Knoten 2 ist der Mutterknoten von Knoten 5
- Knoten 4 und Knoten 5 sind Schwesterknoten
- Knoten 1 ist der Wurzelknoten des Baums
- Knoten 10 ist ein Blatt des Baums

Bäume

Präzedenz

- Baum-Diagramme beinhalten (anders als Hasse-Diagramm) Informationen über die lineare Abfolge der Knoten.
- Knoten x geht Knoten y voran (engl. x *precedes* y) genau dann, wenn x links von y steht und keiner der beiden Knoten den anderen dominiert.
- Für einen Baum T bildet

$$P_T = \{\langle x, y\rangle | x \text{ geht } y \text{ voran}\}$$

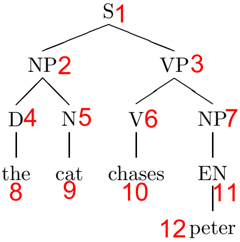
  die zugehörige Präzedenz-Relation.
- P_T ist eine starke Ordnung, also irreflexiv, transitiv und asymmetrisch.

Bäume

Exklusivität

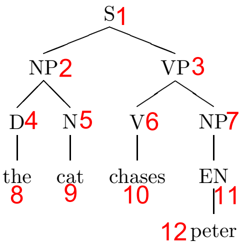
In einem Baum T stehen die Knoten x und y in der Präzedenz-Relation (also $P_t(x,y)$ oder $P_t(y,x)$) genau dann, wenn sie nicht in der Dominanz-Relation stehen (also weder $D_T(x,y)$ noch $D_T(y,x)$).

Beispiel



- Knoten 7 und Knoten 1 stehen in der
- Knoten 7 und Knoten 2 stehen in der
- Knoten 7 und Knoten 9 stehen in der
- Knoten 7 und Knoten 12 stehen in der
- Knoten 7 und Knoten 10 stehen in der

Beispiel

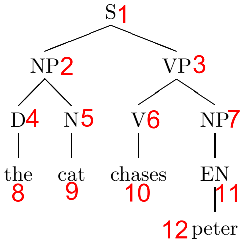


- Knoten 7 und Knoten 1 stehen in der Dominanz-Relation
- Knoten 7 und Knoten 2 stehen in der Präzedenz-Relation
- Knoten 7 und Knoten 9 stehen in der Präzedenz-Relation
- Knoten 7 und Knoten 12 stehen in der Dominanz-Relation
- Knoten 7 und Knoten 10 stehen in der Präzedenz-Relation

Bäume

Nicht-Überkreuzung

Wenn in einem Baum der Knoten x dem Knoten y vorangeht, dann geht jeder Knoten x', der von x dominiert wird, jedem Knoten y' voran, der von y dominiert wird.



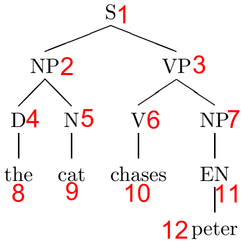
Bäume

Nicht-Überkreuzung

Wenn in einem Baum der Knoten x dem Knoten y vorangeht, dann geht jeder Knoten x', der von x dominiert wird, jedem Knoten y' voran, der von y dominiert wird.

Diese Bedingung schließt folgende Situationen aus:

- Ein Knoten hat mehrere Mutterknoten.
- Äste überkreuzen sich.

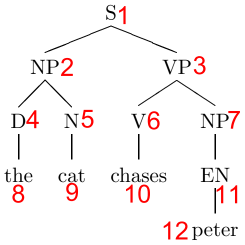


Bäume

Etikettierung

Eine Etikettierungsfunktion L_T eines Baums T ist eine Funktion, die jedem Knoten ein Etikett zuweist.

- L_T muss nicht injektiv sein (mehrere Knoten können das selbe Etikett tragen).
- Bei Ableitungsbäumen werden Blätter (auch Terminal-Knoten genannt) auf Terminalsymbole abgebildet und alle anderen Knoten auf Nichtterminal-Symbole.



Bäume

Mit Hilfe dieser Eigenschaften von Bäumen können *Theoreme* bewiesen werden, also Sachverhalte, die für alle Bäume gelten. Zum Beispiel

Theorem

Wenn x und y Schwesterknoten sind, dann gilt entweder $P_T(x,y)$ oder $P_T(y,x)$.

Beweisskizze: Schwesterknoten haben dieselbe Mutter und stehen untereinander nicht in der Dominanzrelation. Aus dem Exklusivitätssatz folgt, dass sie in der Präzedenzrelation stehen.

Theorem

Die Menge der Blätter eines Baumes sind durch P_T total geordnet.

Beweisskizze: Folgt aus dem Satz der Nicht-Überkreuzung.

Grammatiken und Bäume

- Zur Erinnerung: kontextfreie Grammatiken sind Grammatiken mit Regeln, deren linke Regelseiten aus genau einem Nichtterminalsymbol bestehen:

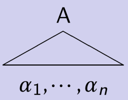
$$A \rightarrow \alpha$$

  mit $A \in N$ und $\alpha \in (T \cup N)^*$
- Ableitungen kontextfreier Grammatiken können als etikettierte Bäume abgebildet werden.
- Bäume repräsentieren dabei die relevanten Aspekte einer Ableitung (also welche Regeln für die Generierung welcher Konstituenten angewandt wurden, aber nicht, in welcher Reihenfolge Regeln angewandt wurden).

Grammatiken und Bäume

Definition

Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$, bei der alle Regeln als linke Seite genau ein Nichtterminalsymbol haben, generiert einen Baum B genau dann, wenn

- die Wurzel von B mit S etikettiert ist,
- die Blätter entweder mit Terminalsymbolen oder mit ϵ etikettiert sind, sowie
- es für jeden Teilbaum 

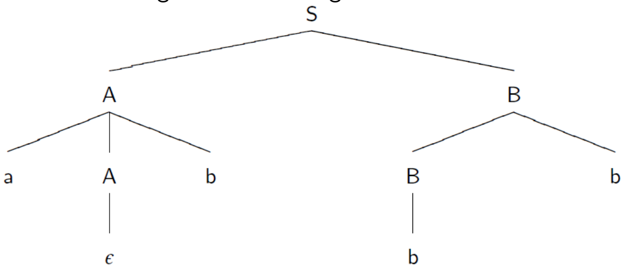
in B eine Regel $A \rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ in P gibt.

Grammatiken und Bäume

Beispielgrammatik

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P) \quad P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow AB & B \rightarrow Bb \\ A \rightarrow aAb & B \rightarrow b \\ A \rightarrow \epsilon & \end{array} \right\}$$

Diese Grammatik generiert z.B. folgenden Baum:



Frage: Welche Sprache wird durch diese Grammatik generiert?