

# Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

## Ordnungsrelationen

Dozentin: Wiebke Petersen

4. Foliensatz

# starke / schwache Ordnungen

Eine **Ordnung**  $R$  einer Menge  $A$  ist eine binäre Relation  $R \subseteq A \times A$ .  
Man unterscheidet zwischen **starken** und **schwachen** Ordnungen:

**Eine binäre Relation ist eine schwache Ordnung, gdw. sie**

- transitiv,
- reflexiv und
- anti-symmetrisch

ist.

**Eine binäre Relation ist eine starke Ordnung, gdw. sie**

- transitiv,
- irreflexiv und
- asymmetrisch

ist.

Starke Ordnungen werden auch **strikte** Ordnungen genannt.

# korrespondierende Ordnungen

Eine schwache Ordnung  $R \subseteq A \times A$  und eine starke Ordnung  $S$  **korrespondieren** zueinander gdw.

$$R = S \cup \text{id}_A$$

Beispiele: Sei  $A = \{a, b, c, d\}$

- $R_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$
- $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$
- $R_3 = \{\langle d, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$

korrespondierende starke Ordnungen:

- $S_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $S_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$
- $S_3 = \{\langle d, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle\}$

# geordnete Mengen

Eine **geordnete Menge** ist ein Paar  $(M, R)$ , bestehend aus einer Menge  $M$  und einer Ordnung  $R$  von  $M$ .

Beispiele:

- $(\mathcal{P}\mathcal{O}\mathcal{T}(M), \subseteq)$  ist eine schwach geordnete Menge.  
 $(\mathcal{P}\mathcal{O}\mathcal{T}(M), \subset)$  ist die korrespondierende stark geordnete Menge.
- $(\mathbb{N}, \leq)$  ist eine schwach geordnete Menge.  
 $(\mathbb{N}, <)$  ist die korrespondierende stark geordnete Menge.

# Terminologie

Sei  $(M, R)$  eine (stark oder schwach) geordnete Menge.

- $a$  ist ein **Vorgänger** von  $b$  gdw.  $R(a, b)$ .
- $a$  ist ein **Nachfolger** von  $b$  gdw.  $R(b, a)$ .
- $a$  ist ein **unmittelbarer Vorgänger** (oder **unterer Nachbar**) von  $b$  gdw.
  - $a \neq b$ ,
  - $R(a, b)$ , und
  - es gibt kein  $c \in M$  mit  $c \notin \{a, b\}$  so dass  $R(a, c)$  und  $R(c, b)$ .
- $a$  ist ein **unmittelbarer Nachfolger** (oder **oberer Nachbar**) von  $b$  gdw.  $b$  ein unmittelbarer Vorgänger von  $a$  ist.

Wenn  $a$  ein unmittelbarer Vorgänger von  $b$  ist, dann schreibt man häufig  $a < b$ .

# Hassediagramm

## Konstruktion

Eine endliche geordnete Mengen  $(M, R)$  kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jedes Element von  $M$  einen Punkt zeichnet und zwar so, daß  $a$  unterhalb von  $b$  liegt, wenn  $a \neq b$  und  $(a, b) \in R$ .

Zwei Punkte  $a$  und  $b$  werden mit einer Linie verbunden, wenn  $a < b$ .

Übung: Zeichnen sie die folgenden Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm von  $(\{a, b, c\}, R_2)$  mit  
 $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$

Hasse-Diagramm von  $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

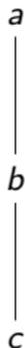
# Beispiele

Hasse-Diagramm von  $(\{a, b, c\}, R_2)$  mit  
 $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$

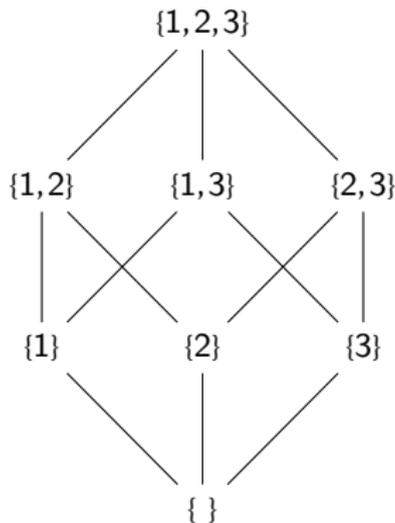
Hasse-Diagramm von  $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

# Beispiele

Hasse-Diagramm von  $(\{a, b, c\}, R_2)$  mit  
 $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$



Hasse-Diagramm von  $(\mathcal{POT}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$



# Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

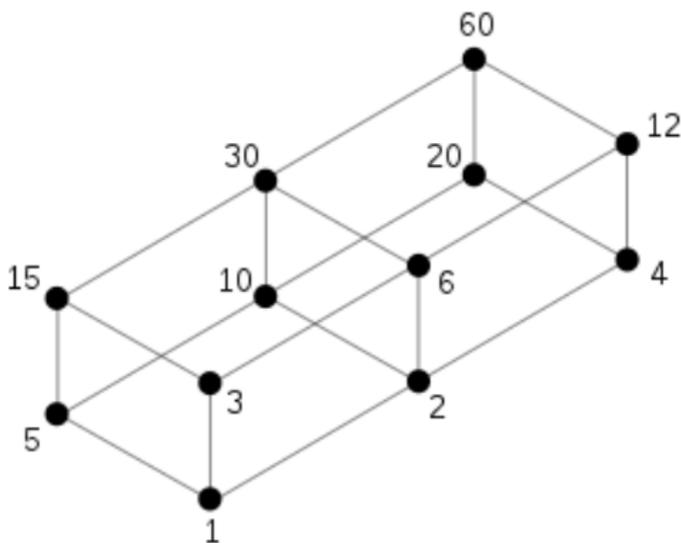
Sei  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$ , und  
 $R = \{\langle x, y \rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$ .

Hassediagramm der geordneten Menge  $(M, R)$ :

# Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

Sei  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$ , und  
 $R = \{(x, y) \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$ .

Hassediagramm der geordneten Menge  $(M, R)$ :



# Übung

Zeichnen sie ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge

$M = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$ .

# totale/partielle Ordnung

Eine binäre Ordnungsrelation ist eine **totale** Ordnung, gdw. sie **konnex** ist.

Eine binäre Relation  $R \subseteq M \times M$  ist **konnex** (bzw. **linear**) gdw. für alle  $x, y \in M$  mit  $x \neq y$  gilt:  $\langle x, y \rangle \in R$  oder  $\langle y, x \rangle \in R$ .

- Das Hassediagramm einer total geordneten, endlichen Menge bildet eine Linie. Kein Element hat mehr als einen oberen oder unteren Nachbarn.
- Totale Ordnungen werden auch **lineare** Ordnungen genannt.
- In Abgrenzung zu totalen Ordnungen werden allgemeine Ordnungen auch **partielle** Ordnungen (oder **Halbordnungen**) genannt. Im Englischen spricht man von '**poset**' (partially ordered set).

# minimale und maximale Elemente

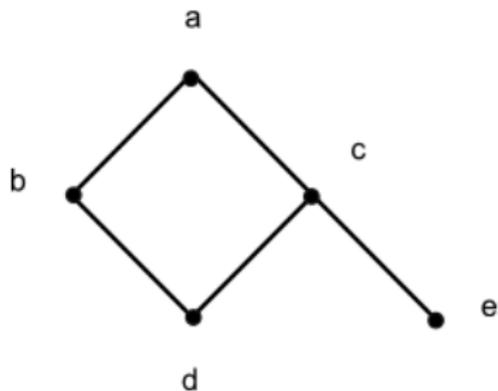
Sei  $R \subseteq A \times A$  eine Ordnung (stark oder schwach).

- Ein Element  $x \in A$  ist **minimal** gdw. es kein  $y \neq x$  gibt, das Vorgänger von  $x$  ist.
- Ein Element  $x \in A$  ist **maximal** gdw. es kein  $y \neq x$  gibt, das Nachfolger von  $x$  ist.
- $x \in A$  ist das **Minimum** von  $A$ , wenn  $x$  Vorgänger jedes anderen Elements von  $A$  ist (für alle  $y \in A$  mit  $x \neq y$  gilt  $x < y$ ).
- $x \in A$  ist das **Maximum** von  $A$ , wenn  $x$  Nachfolger jedes anderen Elements von  $A$  ist (für alle  $y \in A$  mit  $x \neq y$  gilt  $y < x$ ).

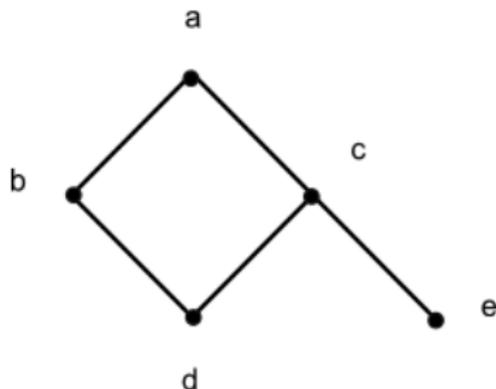
Hinweise:

- eine total geordnete Menge kann höchstens ein minimales und höchstens ein maximales Element haben.
- eine partiell geordnete Menge kann beliebig viele minimale und maximale Elemente aber höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum haben.

# Beispiel



# Beispiel



- $a$  ist das einzige maximale Element und somit das Maximum der geordneten Menge.
- $d$  und  $e$  sind die minimalen Elemente der geordneten Menge.
- die geordnete Menge hat kein Minimum,

# Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei  $(M, R)$  eine geordnete Menge und seien  $a$  und  $b$  Elemente von  $M$ .  $a$  und  $b$  heißen **vergleichbar**, falls  $aRb$  oder  $bRa$ ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge  $K$  von  $M$  heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in K$  gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge  $A$  von  $M$  heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in A$  gilt, daß sie ungleichbar sind.

# Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei  $(M, R)$  eine geordnete Menge und seien  $a$  und  $b$  Elemente von  $M$ .  $a$  und  $b$  heißen **vergleichbar**, falls  $aRb$  oder  $bRa$ ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge  $K$  von  $M$  heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in K$  gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge  $A$  von  $M$  heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in A$  gilt, daß sie unvergleichbar sind.

## Satz von Dilworth

Für eine geordnete endliche Menge  $(M, R)$  gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von  $(M, R)$  ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von  $(M, R)$ , die man für eine Partition von  $M$  benötigt.

# Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei  $(M, R)$  eine geordnete Menge und seien  $a$  und  $b$  Elemente von  $M$ .  $a$  und  $b$  heißen **vergleichbar**, falls  $aRb$  oder  $bRa$ ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge  $K$  von  $M$  heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in K$  gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge  $A$  von  $M$  heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige  $a, b \in A$  gilt, daß sie unvergleichbar sind.

## Satz von Dilworth

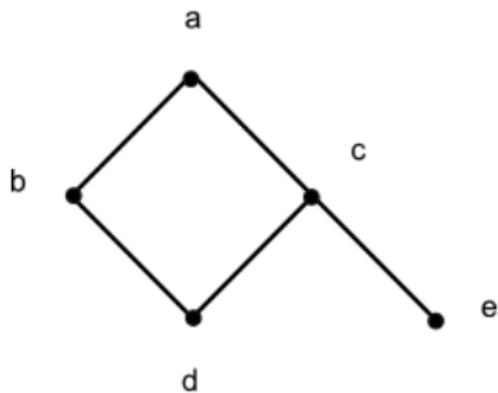
Für eine geordnete endliche Menge  $(M, R)$  gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von  $(M, R)$  ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von  $(M, R)$ , die man für eine Partition von  $M$  benötigt.

## Höhe / Breite

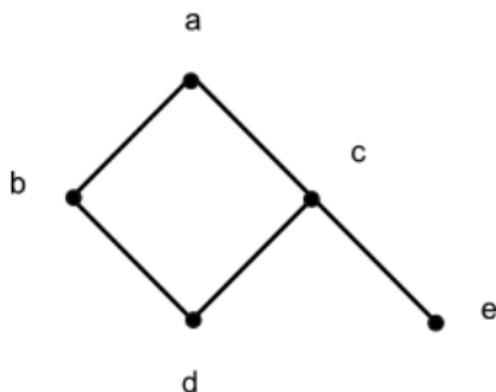
Die **Höhe** einer endlichen geordneten Menge  $(M, R)$  ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Kette von  $(M, R)$ .

Die **Breite** einer endlichen geordneten Menge  $(M, R)$  ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Antikette von  $(M, R)$ .

# Beispiel



# Beispiel



- Die Elemente  $a$  und  $b$  sind vergleichbar.
- $d$  und  $e$  sind unvergleichbar.
- $\{a, b, d\}$  ist eine Kette der geordneten Menge.
- $\{b, c\}$  ist Antikette der geordneten Menge.
- Die geordnete Menge hat die Höhe 3 und die Breite 2.
- Die Ketten  $\{a, b, d\}$  und  $\{c, e\}$  bilden eine minimale Partition in Ketten der geordneten Menge.

# Intervall / Ideal / Filter

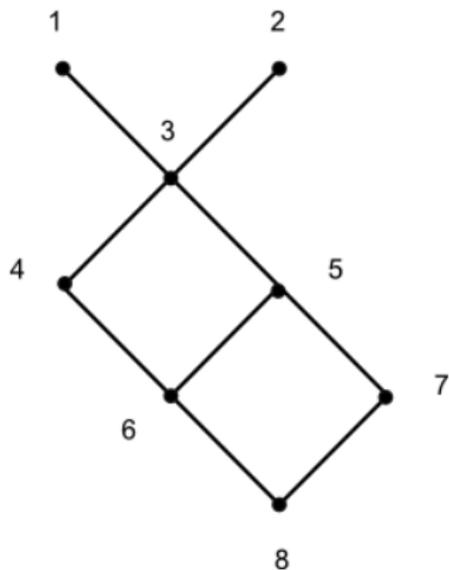
Sei  $(M, \trianglelefteq)$  eine geordnete Menge:

**Intervall:**  $[a, b] := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x \trianglelefteq b\}$

**Hauptideal:**  $(b) := \{x \in M \mid x \trianglelefteq b\}$

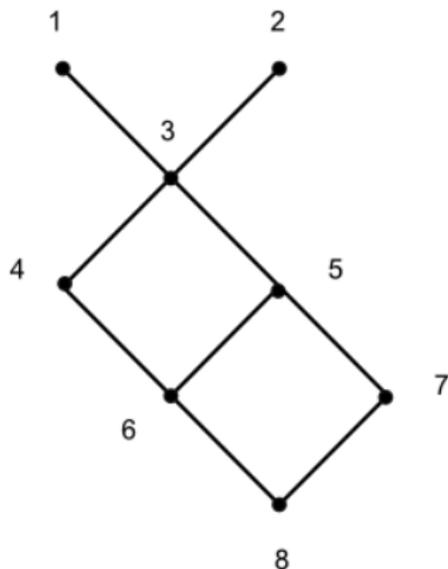
**Hauptfilter:**  $[a) := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x\}$

# Beispiel



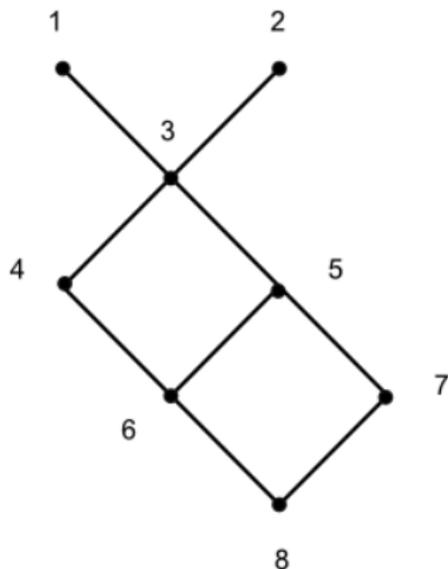
●  $[6,1] =$

# Beispiel



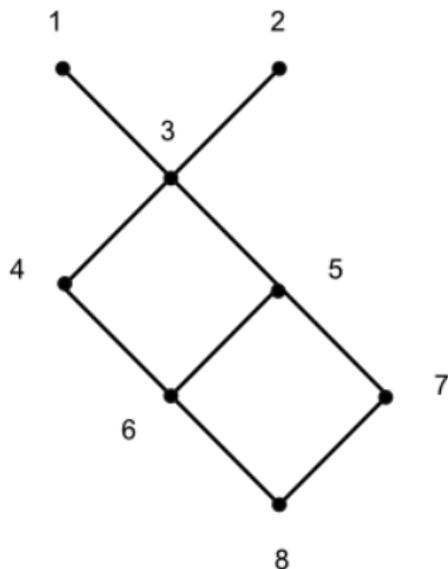
- $[6,1] = \{1,3,4,5,6\}$  (Intervall von 6 bis 1)
- $(4) =$

# Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$  (Intervall von 6 bis 1)
- $(4] = \{4, 6, 8\}$  (Hauptideal von 4)
- $[6) =$

# Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$  (Intervall von 6 bis 1)
- $(4] = \{4, 6, 8\}$  (Hauptideal von 4)
- $[6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (Hauptfilter von 6).

# Ordnungserhaltende/monotone Abbildungen

## Definition

Seien  $(M, \trianglelefteq)$  und  $(M', \trianglelefteq')$  zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion)  $f: M \rightarrow M'$  heißt **ordnungserhaltend** oder **monoton**, wenn für alle  $x, y \in M$  gilt:

$$\text{wenn } x \trianglelefteq y, \text{ dann } f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Beispiele:

- $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(x) = 2x$  ist eine monotone Abbildung von  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  nach  $(\mathbb{N}_0, \leq)$ .
- $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(x) = x^2$  ist eine monotone Abbildung von  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  nach  $(\mathbb{N}_0, \leq)$ .
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $f(x) = x^2$  ist keine monotone Abbildung von  $(\mathbb{Z}, \leq)$  nach  $(\mathbb{Z}, \leq)$ .
- Sei  $M$  eine endliche Menge.  $f: \mathcal{POT}(M) \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(A) = |A|$  ist eine ordnungserhaltende Abbildung von  $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$  nach  $(\mathbb{N}_0, \leq)$ .

# Ordnungseinbettung

## Definition

Eine monotone Funktion heißt **Ordnungseinbettung**, wenn sie injektiv ist, und **Ordnungsisomorphismus**, wenn sie bijektiv ist.

Ein Ordnungsisomorphismus von  $(M, R)$  in sich selbst wird auch **Ordnungsautomorphismus** genannt.

Beispiele:

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $f(x) = -x$  ist ein Ordnungsisomorphismus von  $(\mathbb{Z}, \leq)$  nach  $(\mathbb{Z}, \geq)$ .
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{x}{2}$  ist ein Ordnungsautomorphismus auf  $(\mathbb{R}, \leq)$ .

# Quasiordnung

Der Begriff der Quasiordnung ist schwächer als der der Ordnung:

## Definition

Eine binäre Relation  $R \subseteq M \times M$  ist eine **Quasiordnung** (oder **Präordnung**), wenn  $R$

- reflexiv und
- transitiv ist.

Beispiel:

- Die Ordnung  $\leq_{abs}$ , die die ganzen Zahlen nach ihrem Betrag ordnet ist eine Quasiordnung aber keine Ordnung (beachte, dass  $-3 \leq_{abs} 3$  und  $3 \leq_{abs} -3$  aber  $-3 \neq 3$ ).

# Zusammenfassung: Ordnungen

## schwache Ordnungen

	transitiv	reflexiv	anti-symmetrisch	linear/total
Quasiordnung	★	★		
partielle Ordnung	★	★	★	
totale Ordnung	★	★	★	★

Bemerkung: (Schwache) lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit  $\leq$ , bzw. partielle Ordnungsrelationen mit  $\subseteq$  bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

# Zusammenfassung: Ordnungen

## strikte Ordnungen

	transitiv	irreflexiv	asymmetrisch	linear/total
strikte partielle Ordnung	★	★	★	
strikte totale Ordnung	★	★	★	★

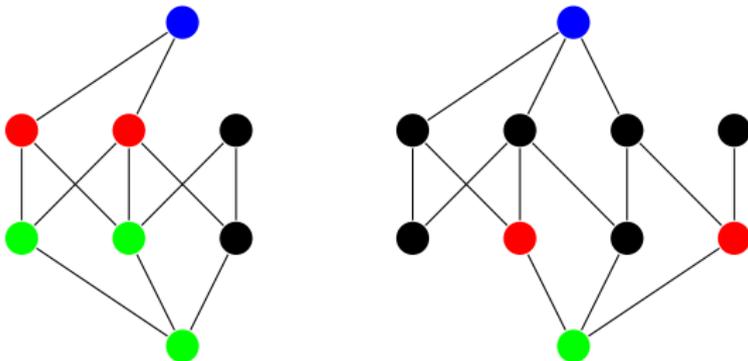
Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit  $<$ , bzw. mit  $\subset$  bezeichnet.

Man könnte strikte Ordnungen äquivalent auch als transitive, irreflexive und antisymmetrische Relationen definieren, da eine Relation, die irreflexiv und antisymmetrisch ist, immer asymmetrisch ist.

# obere / untere Schranke

Sei  $(M, \leq)$  eine (partiell) geordnete Menge und  $K$  eine Teilmenge von  $M$ . Ein Element  $x$  von  $M$  ist

- eine **obere Schranke** von  $K$ , g.d.w. für alle  $y \in K : y \leq x$ ;
- eine **untere Schranke** von  $K$ , g.d.w. für alle  $y \in K : x \leq y$ .



Die Abbildungen zeigen die Hassediagramme zweier geordneter Mengen. Die rot markierten Elementen haben die blau markierten Elemente als obere und die grün markierten als untere Schranken.

# kleinste obere / größte untere Schranke

$x$  heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von  $K$  in  $M$ , wenn  $x$  eine obere Schranke von  $K$  ist und für jede obere Schranke  $y \in M$  von  $K$  mit  $x \neq y$  die Ungleichung  $x \leq y$  gilt. Wir schreiben  $\sup K$  oder  $\vee K$  für das Supremum von  $K$  (lese  $\vee$  als 'join').

$x$  heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von  $K$  in  $M$ , wenn  $x$  eine untere Schranke von  $K$  ist und für jede untere Schranke  $y \in M$  von  $K$  mit  $x \neq y$  die Ungleichung  $y \leq x$  gilt. Wir schreiben  $\inf K$  oder  $\wedge K$  für das Infimum von  $K$  (lese  $\wedge$  als 'meet').

Wir schreiben  $x \vee y$  statt  $\vee\{x, y\}$  und  $x \wedge y$  statt  $\wedge\{x, y\}$ .

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen  $M$  gibt, für die nicht jede Teilmenge  $K \subseteq M$  ein Supremum oder Infimum hat.

# kleinste obere / größte untere Schranke

$x$  heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von  $K$  in  $M$ , wenn  $x$  eine obere Schranke von  $K$  ist und für jede obere Schranke  $y \in M$  von  $K$  mit  $x \neq y$  die Ungleichung  $x \leq y$  gilt. Wir schreiben  $\sup K$  oder  $\vee K$  für das Supremum von  $K$  (lese  $\vee$  als 'join').

$x$  heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von  $K$  in  $M$ , wenn  $x$  eine untere Schranke von  $K$  ist und für jede untere Schranke  $y \in M$  von  $K$  mit  $x \neq y$  die Ungleichung  $y \leq x$  gilt. Wir schreiben  $\inf K$  oder  $\wedge K$  für das Infimum von  $K$  (lese  $\wedge$  als 'meet').

Wir schreiben  $x \vee y$  statt  $\vee\{x, y\}$  und  $x \wedge y$  statt  $\wedge\{x, y\}$ .

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen  $M$  gibt, für die nicht jede Teilmenge  $K \subseteq M$  ein Supremum oder Infimum hat.

Das Infimum ist also das Maximum aller unteren Schranken und das Supremum ist das Minimum aller oberen Schranken.

# Beispiele

- Für die linear geordnete Menge  $(\mathbb{R}, \leq)$  gilt:  $\sup[1, 4] = 4$  und  $\inf[1, 4] = 1$ .
- Für die partiell geordnete Menge  $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$  mit  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  ist das Supremum von  $K = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1\}\}$  die Vereinigung aller Elemente von  $K$ , also  $\sup K = \{1, 2, 4\}$ .  
Das Infimum von  $K$  ist der Durchschnitt aller Elemente von  $K$ , also  $\inf K = \emptyset$ .

# Verbände

## Verband: ordnungstheoretische Definition

Eine geordnete Menge  $(V, \leq)$  ist ein **Verband**, g.d.w. zu je zwei Elementen  $x$  und  $y$  aus  $V$  auch das Supremum von  $x$  und  $y$  und das Infimum von  $x$  und  $y$  Elemente von  $V$  sind.

## vollständiger Verband

Ein Verband  $(V, \leq)$  ist ein **vollständiger Verband**, falls für alle  $K \subseteq V$  gilt, daß  $\sup K \in V$  und  $\inf K \in V$ .

Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element  $\sup V$ , das **Einselement** ( $1_V$ ) genannt, und ein kleinstes Element  $\inf V$ , das **Nullelement** ( $0_V$ ) genannt.

Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die **Atome** und die unteren Nachbarn des Einselements die **Koatome** des Verbands.

# Bemerkungen

- Jeder endliche Verband ist vollständig.
- Da  $\inf \emptyset = 1_V$  und  $\sup \emptyset = 0_V$  gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge  $V$ .

# Beispiele

- $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$  ist ein vollständiger Verband,  $\vee$  entspricht  $\cup$  und  $\wedge$  entspricht  $\cap$ .
- $([2, 5], \leq)$  ist ein vollständiger Verband.
- $(\mathbb{R}, \leq)$  ist ein Verband, aber nicht vollständig.
- $(\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1\}\}, \subseteq)$  ist kein Verband.