Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Mengen und Mengenoperationen

Dozentin: Wiebke Petersen

1. Foliensatz

Frage

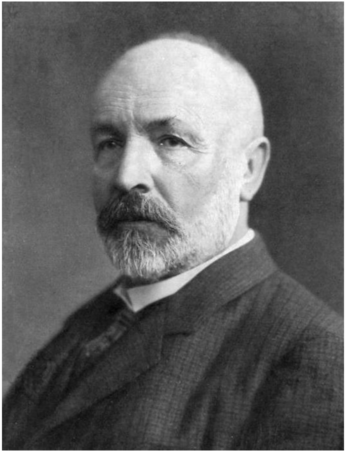
Was ist eine Menge?

1 Minute zum Nachdenken und Diskutieren

Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘genannt werden) zu einem Ganzen.“

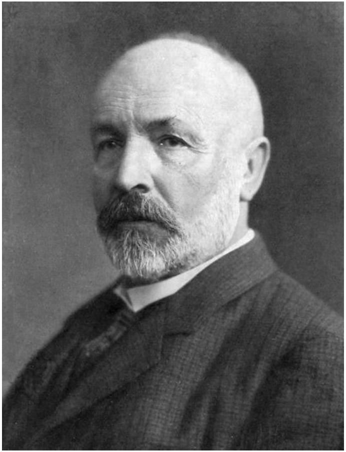


Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente'genannt werden) zu einem Ganzen."

- Mengen werden über ihre Elemente bestimmt.
- Elemente von Mengen können selber Mengen sein.
- Mengen können endlich oder unendlich sein.



Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann identisch oder gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann identisch oder gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die leere Menge (Symbol: $\emptyset$, es gilt $\emptyset = \{\}$).

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann identisch oder gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die leere Menge (Symbol: $\emptyset$, es gilt $\emptyset = \{\}$).
- Mengen mit genau einem Element werden Einermengen (*singleton*) genannt.

Notation und Terminologie

- Variablen für Mengen: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$
- Variablen für Elemente: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
- Ist m ein Element von M so schreibt man $m \in M$.
- Ist m kein Element von M so schreibt man $m \notin M$.
- Zwei Mengen A und B sind genau dann identisch oder gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die leere Menge (Symbol: $\emptyset$, es gilt $\emptyset = \{\}$).
- Mengen mit genau einem Element werden Einermengen (*singleton*) genannt.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen (alle ‚Bruchzahlen').
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen (alle ‚Kommazahlen').

Bertrand Russell (1872-1970)

Russels Antinomie (1901)

- Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Bertrand Russell (1872-1970)

Russels Antinomie (1901)

- Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
- Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Ausweg: ‚Theorie der Typen' (Principia Mathematica, Russel & Whitehead 1910-13)

Mengen werden stufenweise aufgebaut und sind immer von einem höheren Typ als ihre Elemente.

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, ...)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, ...)

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, . . .)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, . . .)

Ist ‚heterologisch' heterologisch?

(nach D.R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach*)

Grellings Paradoxie

Ein Adjektiv heiße

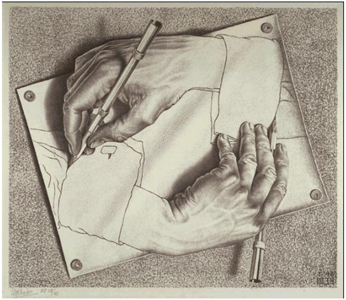
autologisch, wenn es sich selbst beschreibt (Bsp.: dreisilbig, haplogistisch, kurz, xenonymisch, adjektivisch, verbal, vokalenthaltend, exquisit, . . .)

heterologisch, wenn es sich nicht selbst beschreibt (Bsp.: zweisilbig, essbar, grün, . . .)

Ist ‚heterologisch' heterologisch?
(nach D.R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach*)

In diesem Kurs werden Mengen so beschrieben, dass keine Paradoxien auftreten.

Paradoxien der Selbstbezüglichkeit



zeichnende Hände von M.C. Escher

Mengenbeschreibungen

Explizite Mengendarstellung

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enthält.

Beispiel:
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Implizite Mengendarstellung

$\{x | A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel:
$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$,

Mengenbeschreibungen

Explizite Mengendarstellung

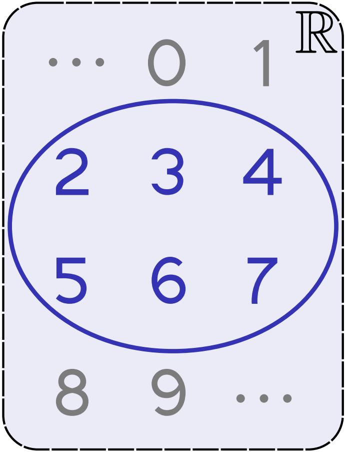
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enthält.

Beispiel:
$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Implizite Mengendarstellung

$\{x | A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel:
$\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < x \text{ und } x < 8\}$,



Hinweise zur expliziten Mengendarstellung

- Beschreibung durch Aufzählung oder -listung
- nur für endliche Mengen möglich
- Die Klammern { und } heißen Mengenklammern oder geschweifte Klammern.
- Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- Elemente können in der Klammernotation mehrfach auftreten: $\{a, b, c\} = \{a, b, a, b, a, b, c\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels charakteristischer Eigenschaft

- { Element $\in$ Grundbereich | Eigenschaft von Element }
- $\{x \in G | E(x)\}$ („Menge aller x in G mit der Eigenschaft E“)
- Bsp.: $\{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
- Wenn der Grundbereich aus dem Kontext bekannt ist oder sich aus der Eigenschaft ergibt, kann er weggelassen werden.
- Bsp.: $\{x | x \text{ ist eine Primzahl}\}$
- Statt des Symbols ‘|’ verwendet man auch das Symbol ‘:’. Also $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Primzahl}\}$

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

1. Festlegung endlich vieler Startelemente:
   Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor
2. Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:
   Wenn x ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von x ein Nachkomme von Cantor.
3. Einschränkung:
   Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

Hinweise zur impliziten Mengendarstellung

Beschreibung mittels rekursiver Definition

Beispiel: Menge der Nachkommen von Georg Cantor

1. Festlegung endlich vieler Startelemente:
   Die Kinder von Cantor sind Nachkommen von Cantor
2. Konstruktionsvorschrift für zusätzliche Elemente:
   Wenn x ein Nachkomme von Cantor ist, dann ist jedes Kind von x ein Nachkomme von Cantor.
3. Einschränkung:
   Nichts sonst ist ein Nachkomme von Cantor.

- Was ist, wenn Cantor keine Kinder hatte?
- Lässt sich so auch die Menge der Nachkommen von Aristoteles definieren? oder die von Merlin?

Teilmengen

Eine Menge N ist eine Teilmenge der Menge M (in Zeichen: $N \subseteq M$) genau dann, wenn alle Elemente von N auch Elemente von M sind.

- Wenn $x \in N$, dann $x \in M$
- Wenn $y \in M$, dann muss $y \in N$ nicht unbedingt gelten, es kann aber gelten.

Eine Menge N ist eine echte Teilmenge der Menge M (in Zeichen: $N \subset M$) genau dann, wenn N eine Teilmenge von M ist und wenn M und N ungleich sind.

- $N \subseteq M$ und $N \neq M$
- Es gibt ein $y \in M$ mit $y \notin N$.

Wenn $N \subseteq M$, dann ist M eine Übermenge von N (in Zeichen: $M \supseteq N$).

Wenn $M \supseteq N$ und $M \neq N$ dann ist M eine echte Übermenge von N (in Zeichen: $M \supset N$).

Teilmengen

$x \in M$: x ist ein Element der Menge M

- $2 \in \{1,2,3\}$
- $2 \notin \{1,3,5\}$
- $\{3\} \in \{M | M$ ist eine Einermenge$\}$
- $\{3\} \notin \{3\}$

$N \subseteq M$: Die Menge N ist eine Teilmenge der Menge M

- $\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$
- $\{2,3\} \subseteq \{2,3\}$
- $\emptyset \subseteq \{1,2,3,4\}$
  (Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge!)
- $\{3\} \not\subseteq \{M | M$ ist eine Einermenge$\}$

$N \subset M$: Die Menge N ist eine echte Teilmenge der Menge M

- $\{1\} \subset \{1,2\}$
- $\{1,2\} \not\subset \{1,2\}$

Vorsicht: Die Element-von- und die Teilmengenrelation müssen streng unterschieden werden!

Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen M und N haben dieselbe Mächtigkeit oder heißen gleichmächtig (in Zeichen: $|M| = |N|$), wenn es eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von M auf N gibt (d.h., die Zuordnung ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N und jedem Element aus N genau ein Element aus M zu.)

endliche Mengen

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge (in Zeichen: $|M|$) ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{1,2\}| = 2$
- $|\{\{1,2\}\}| = 1$

Vorsicht: nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig!

Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

Mengenoperationen sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch unäre und zweistellige auch binäre Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M, also $\mathscr{POT}(M) = \{N | N \subseteq M\}$. Man schreibt auch 2^M für die Potenzmenge von M.

Mengenoperationen (unäre Potenzmengenoperation)

Mengenoperationen sind Abbildungen, die einer oder mehreren Mengen eindeutig eine Menge zuordnen. Einstellige Operationen werden auch unäre und zweistellige auch binäre Operationen genannt.

Die Potenzmengenoperation ist eine unäre Operation, die jeder Menge ihre Potenzmenge zuordnet.

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M, also $\mathscr{POT}(M) = \{N | N \subseteq M\}$. Man schreibt auch 2^M für die Potenzmenge von M.

$$\mathscr{POT}(\{1,2,3\}) = \left\{ \begin{array}{llll} \{ & & & \}, \\ \{1 & & & \}, \\ \{ & 2 & & \}, \\ \{ & & 3 & \}, \\ \{1, & 2 & & \}, \\ \{1, & & 3 & \}, \\ \{ & 2, & 3 & \}, \\ \{1, & 2, & 3 & \}, \end{array} \right\}$$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n-elementige Menge, so ist $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$.

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n-elementige Menge, so ist $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
0	0	1	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1

Mächtigkeit der Potenzmenge

Für endliche Mengen gilt: ist M eine n-elementige Menge, so ist $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
0	0	1	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1
2×	2×	2×	...	2

Mächtigkeit der Potenzmenge

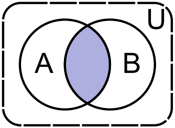
Für endliche Mengen gilt: ist M eine n-elementige Menge, so ist $|\mathscr{POT}(M)| = 2^n$.

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
0	0	1	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1
$2\times$	$2\times$	$2\times$	...	2

2^n Möglichkeiten

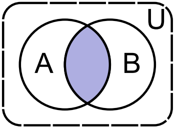
Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$
„A geschnitten mit B“
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$

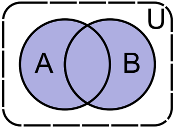


Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$
„A geschnitten mit B“
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$

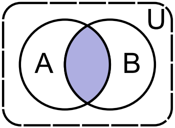


Vereinigung: $A \cup B$
„A vereinigt mit B“
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$

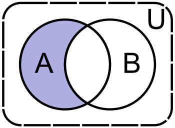


Mengenoperationen (binäre Operationen)

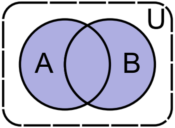
Schnitt: $A \cap B$
„A geschnitten mit B“
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$



Differenz: $A \setminus B$ (oder $A - B$)
„A ohne B“
$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$



Vereinigung: $A \cup B$
„A vereinigt mit B“
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$

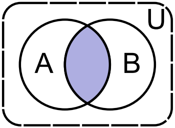


Mengenoperationen (binäre Operationen)

Schnitt: $A \cap B$

„A geschnitten mit B“

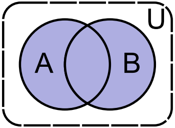
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$



Vereinigung: $A \cup B$

„A vereinigt mit B“

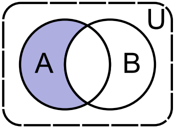
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$



Differenz: $A \setminus B$ (oder $A - B$)

„A ohne B“

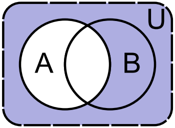
$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$



Komplement (in U): $C_U(A)$

„Komplement von A in U“

$C_U(A) = U \setminus A$



Wenn U feststeht, schreibt man auch $\overline{A}$

Mengenoperationen

Beispiele

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{3,4,5\},\ U = \{1,2,3,4,5,6,7\},$

Mengenoperationen

Beispiele

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$, $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{3,4\}$
- $A \setminus B = \{1,2\}$, $\overline{A} = \{5,6,7\}$

Mengenoperationen

Beispiele

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$, $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{3,4\}$
- $A \setminus B = \{1,2\}$, $\overline{A} = \{5,6,7\}$

Notation

- Zwei Mengen A und B mit leerem Schnitt heißen disjunkt ($A \cap B = \emptyset$).
- Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcup A$ für die Vereinigung aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcup\{B,C,D\} = B \cup C \cup D$)
- Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcap A$ für den Schnitt aller Elemente von A (Bsp.: $\bigcap\{B,C,D\} = B \cap C \cap D$)
- Häufig werden auch Indizes und Indexmengen zur Notation verwendet. Bsp.: Sei $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 | x \leq i\}$, dann

$$\bigcup_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0,1,2,3,4,5\} \text{ und } \bigcap_{3 \leq i \leq 5} A_i = \{0,1,2,3\}$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

$\emptyset$ ist neutrales Element der Vereinigung: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Eigenschaften der Mengeoperationen (Schnitt und Vereinigung)

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Idempotenzgesetze:

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

$\emptyset$ ist neutrales Element der Vereinigung: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Gibt es auch ein neutrales Element des Schnitts?

Gesetze der Komplementoperation

Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Gesetze der Komplementoperation

de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

weitere Gesetze:

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} \cap A = \emptyset$$