

# Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

## Kombinatorik

Dozentin: Wiebke Petersen

7. Foliensatz

# Kombinatorik

- Thema der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen.
- Typische kombinatorische Aufgaben sind Urnenaufgaben: Wieviele Möglichkeiten gibt es  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln zu ziehen?

# Kombinatorik

- Thema der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen.
- Typische kombinatorische Aufgaben sind Urnenaufgaben: Wieviele Möglichkeiten gibt es  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln zu ziehen?
- Hierbei unterscheidet man
  - ob die gezogenen Kugeln wieder zurückgelegt werden oder nicht, und
  - ob die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, beachtet wird oder nicht.



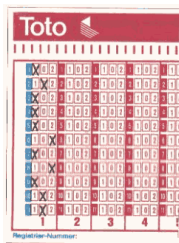
# kombinatorische Grundaufgaben: Beispiele

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	3er-Wette (Rennsport)	Toto
ohne Beachtung der Reihenfolge	Lotto / Skat	Eisbecher

# Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der Ergebnisse von 11 Fußballspielen  
(1: Sieg Heimmannschaft, 2: Sieg Gastmannschaft, 0: unentschieden).

Beispiel: Toto  
(11er-Wette)



# Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der Ergebnisse von 11 Fußballspielen (1: Sieg Heimmannschaft, 2: Sieg Gastmannschaft, 0: unentschieden).

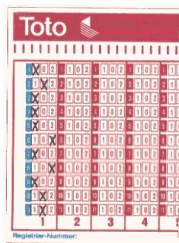
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{11} = 177147$$

Es gibt

$$n^k$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

Beispiel: Toto  
(11er-Wette)



# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Spezialfall: alle Kugeln werden gezogen ( $n = k$ )

# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Spezialfall: alle Kugeln werden gezogen ( $n = k$ )

## Permutationen

$n$  Objekte lassen sich auf  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.

Der Ausdruck  $n!$  wird ‚ $n$  Fakultät‘ gelesen.

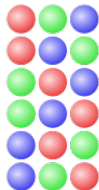
Als **Permutation** bezeichnet man eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst.

Zu einer  $n$ -elementigen Menge gibt es  $n!$  Permutationen.

Permutationen sind ein Spezialfall ( $k = n$ ) des ‚Ziehens ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge‘

Lineare Anordnungsmöglichkeiten für 3 verschiedenfarbige Kugeln:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$





# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der ersten 3 Plätze bei einem Pferderennen, wenn 10 Pferde starten.

**Beispiel: 3er-Wette  
Pferderennsport**



# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der ersten 3 Plätze bei einem Pferderennen, wenn 10 Pferde starten.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

**Beispiel: 3er-Wette  
Pferderennsport**



# Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Lottospiel (6 aus 49)

Beispiel: Skathände (10 aus 32)

**Beispiel: Lotto**



**Beispiel: Skat**



# Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Lottospiel (6 aus 49)

$$\frac{49!}{(49-6)!} : 6! = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \binom{49}{6} = 13983816$$

Beispiel: Skathände (10 aus 32)

$$\frac{32!}{(32-10)!} : 10! = \frac{32!}{(32-10)! \cdot 10!} = \binom{32}{10} = 64512240$$

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

Beispiel: Lotto



Beispiel: Skat



# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede  $k$ -Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf  $k!$  Arten anordnen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Zurücklegen aber **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede  $k$ -Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf  $k!$  Arten anordnen.

Folglich gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

verschiedene ungeordnete  $k$ -Auswahlen aus einer  $n$ -Menge ohne Wiederholungen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Zurücklegen aber **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede  $k$ -Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf  $k!$  Arten anordnen.

Folglich gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

verschiedene ungeordnete  $k$ -Auswahlen aus einer  $n$ -Menge ohne Wiederholungen.

Die Zahlen  $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  sind die **Binomialkoeffizienten** und werden oft mit  $\binom{n}{k}$  bezeichnet (in Worten ‚ $n$  über  $k$ ‘).

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.



# Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Eisbecher mit 3 Kugeln aus 10 Eissorten zusammenstellen.

**Beispiel: Eisbecher**



# Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Eisbecher mit 3 Kugeln aus 10 Eissorten zusammenstellen.

$$\binom{10+3-1}{3} = 220$$

Es gibt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

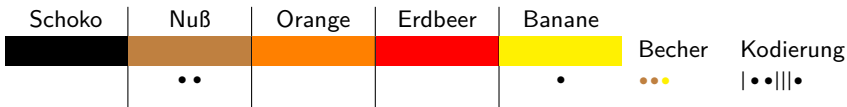
Möglichkeiten  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

**Beispiel: Eisbecher**



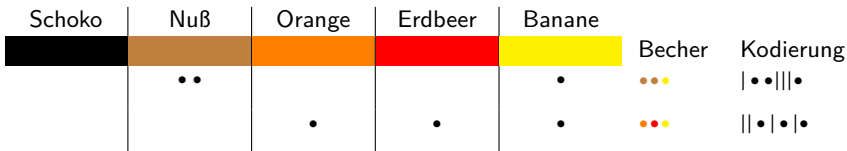
# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

Schoko	Nuß	Orange	Erdbeer	Banane	Becher	Kodierung
●●●●●●●●	●●	●	●	●	●●●	●●   ●
●		●	●	●	●●●	● ● ●
			●●		●●●	●   ●●

# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

Schoko	Nuß	Orange	Erdbeer	Banane	Becher	Kodierung
●●●●●●●●	●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●	●●  ●
		●	●	●	●●●	● ● ●
●			●●		●●●	●  ●●
			●●●		●●●	●●●

# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

Schoko	Nuß	Orange	Erdbeer	Banane	Becher	Kodierung
					●●●	●●   ●
	●●			●	●●●	● ● ●
		●	●	●	●●●	●   ●●
●			●●		●●●	●●●
			●●●		●●●	

Die Kodierung der Eisbecher ist so gewählt, dass sich das Problem der Wahl von  $k$  Eiskugeln aus  $n$  Eissorten auf das Problem der linearen Anordnung von  $k$  ununterscheidbaren Kugeln und  $n-1$  ununterscheidbaren Strichen reduziert. Dieses Problem lässt sich als Auswahl von  $k$  Positionen (die Kugelpositionen) aus  $k+n-1$  Positionen auffassen.

Hierfür gibt es

# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

Schoko	Nuß	Orange	Erdbeer	Banane	Becher	Kodierung
					●●●	●●   ●
	●●			●	●●●	● ● ●
		●	●	●	●●●	●   ●●
●			●●		●●●	●●●
			●●●			

Die Kodierung der Eisbecher ist so gewählt, dass sich das Problem der Wahl von  $k$  Eiskugeln aus  $n$  Eissorten auf das Problem der linearen Anordnung von  $k$  ununterscheidbaren Kugeln und  $n-1$  ununterscheidbaren Strichen reduziert. Dieses Problem lässt sich als Auswahl von  $k$  Positionen (die Kugelpositionen) aus  $k+n-1$  Positionen auffassen.

Hierfür gibt es

$$\binom{k+n-1}{k} \text{ Möglichkeiten}$$



# kombinatorische Grundaufgaben: Zusammenfassung

Anzahl der  $k$ -Auswahlen aus einer  $n$ -er-Menge:

	ohne Wiederholungen	mit Wiederholungen
mit Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n^k$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

## Hinweise:

- Bearbeiten Sie bitte das Modul Kombinatorik ([Link](#))
- Berechnung von Binomialkoeffizienten ([Link](#))