

Pāṇinis Aṣṭādhyāyī

Wiebke Petersen

WiSe 11/12

अइउण्। ऋलृक्। एओङ्। ऐऔच्। हयवरट्।
लण्। ञमङणनम्। झभञ्। घढधष्। जबगडदश्।
खफछठथचटतव्। कपय्। शषसर्। हल्।

Sanskrit

- reiche Morphologie
 - nominale Flexion: 3 Genera, 3 Numeri, 8 Kasus
 - verbale Flexion: 6 Tempora, 3 Modi, 3 Personen, 3 Numeri, 2-3 Genera Verbi
 - ▶ Flexion von 'bhū' *sein* [von <http://sanskrit.inria.fr/portal.html>]
- komplexes Sandhi-System

Die Bedeutung der Phonologie in Sanskritgrammatiken

Sandhi-Beispiele

- na asti iha → nāstīha
- na iha → neha
- adya eva → adyaiva
- upari upari → upary upari
- te api → te 'pi
- vane āste → vana āste
- tasmai adāt → tasmā adāt

Die Bedeutung der Phonologie in Sanskritgrammatiken

Rezitationsformen

Nach Staal 1974 zwischen dem 10. und 7. Jahrhundert v. Chr.:

Samhitāpāṭha: Rezitation ganzer kontinuierlicher Verse

Padapāṭha: *Wort-für-Wort* Rezitation

Beispiel aus der Ṛgveda (10.127.2):

Samhitāpāṭha: órv aprā ámartyā niváto devy̐ udvátaḥ //

Padapāṭha: /á/urú/aprāḥ/ámartyā/ni-vátaḥ/deví/ut-vátaḥ //

„The immortal goddess has pervaded the wide space, the depths and the heights.“

Weitere Rezitationsformen

- *jaṭā-pāṭha* (Zopfform)
1-2-2-1-1-2, 2-3-3-2-2-3, 3-4-4-3-3-4, 4-5-5-4-4-5, ...
- *ghana-pāṭha* (Glockenform)
1-2-2-1-1-2-3-3-2-1-1-2-3
2-3-3-2-2-3-4-4-3-2-2-3-4
3-4-4-3-3-4-5-5-4-3-3-4-5

Beispiel: *Gāyatrī Mantra*

tat savitur vareṇyaṃ

1 2 3

bhargo devasya dhīmahi

4 5 6

dhiyo yó naḥ pracodayāt

▶ Rezitation in Glockenform

▶ weiteres Beispiel

Indische Grammatiktradition

Sanskrit

- reiche Morphologie
- komplexes Sandhi-System

Linguistik als „Wissenschaft der Wissenschaften“ (*śāstrānām śāstram*):

- Hilfswissenschaft für die rituelle Rezitation der Veden
- Schutz vor Sprachwandel (Veden → Pāṇini: fast 1000 Jahre)
- mündliche Tradition ⇒ Linearität
- hohe Konzeptualisierung: Artikulationsort und -art, Suffix, ...
- *Padapāṭha*-Rezitationsform (1000 bis 700 v. Chr.)
- Grammatik zielt auf endlichen Korpus der Veden

Varga-System (ca. 700 v. Chr.)

Vokale	a	ā	i	ī	u	ū	ṛ	ṝ	ḷ
	e	o	ai	au					
Konsonanten									
<i>Sparśa:</i>	k		kh		g		gh		ṅ
	c		ch		j		jh		ñ
	ṭ		ṭh		ḍ		ḍh		ṇ
	t		th		d		dh		n
	p		ph		b		bh		m
<i>Antaḥsthā:</i>	y		r		l		v		
<i>Ūṣman:</i>	ś		ṣ		s		h		
zusätzliche Laute:									
<i>Anusvāra:</i>	ṁ								
<i>Visarga:</i>	ḥ								
<i>Jihvāmūlīya:</i>	ḥ								
<i>Upadhmānīya:</i>	ḥ								

[?]

Pāṇinis Sanskritgrammatik (ca. 350 v. Chr.)

Bestandteile von Pāṇinis Grammatik

- 1 *Śivasūtras*: mit Markern durchsetzte Lautliste
- 2 *Aṣṭādhyāyī*: System von ca. 4 000 grammatischen Regeln
- 3 *Dhātupāṭha*: Verzeichnis von ca. 2 000 Verbalwurzeln
- 4 *Gaṇapāṭha*: Liste von Gruppen nonverbaler Stämme

Bloomfield 1992

The descriptive grammar of Sanskrit, which Pāṇini brought to its perfection, is one of the greatest monuments of human intelligence and an indispensable model for the description of languages.

Ökonomieprinzip in den *Aṣṭādhyāyī* (*lāghava*)

- Wortstellung zielt auf Minimierung der Silbenzahl
- Verzicht auf Verben
- Ordnung der *Sūtras* nicht primär thematisch
- Vererbungshierarchie durch Überschriften (nicht thematisch)
- Unmittelbar nachfolgende Regeln einer Regel erben deren kompatible Bestandteile (*Anuvṛtti*-Vererbung).
- Das Prinzip des *kollektiven Blockierens* regelt die Regelordnung.

⇒ Die *Aṣṭādhyāyī* bilden eine nichtmonotone Vererbungshierarchie mit Defaults, in der **Regelbestandteile** vererbt werden.

Altes indisches Sprichwort: „Die Grammatiker achten das Einsparen einer Mora in gleicher Weise wie die Geburt eines Sohnes.“

Ökonomieprinzip in den *Aṣṭādhyāyī* (*lāghava*)

- Wortstellung zielt auf Minimierung der Silbenzahl
 - Verzicht auf Verben
 - Ordnung der *Sūtras* nicht primär thematisch
 - Vererbungshierarchie durch Überschriften (nicht thematisch)
 - Unmittelbar nachfolgende Regeln einer Regel erben deren kompatible Bestandteile (*Anuvṛtti*-Vererbung).
 - Das Prinzip des *kollektiven Blockierens* regelt die Regelordnung.
- ⇒ Die *Aṣṭādhyāyī* bilden eine nichtmonotone Vererbungshierarchie mit Defaults, in der **Regelbestandteile** vererbt werden.

Altes indisches Sprichwort: „Die Grammatiker achten das Einsparen einer Mora in gleicher Weise wie die Geburt eines Sohnes.“

Phonologische Regeln

moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C_D$$

Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि)
- Analyse: [ik]_{GEN}[yaṇ]_{NOM}[aC]_{LOK}
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/__ [aC]

Phonologische Regeln

moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C_D$$

Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि)
- Analyse: [ik]_{GEN}[yaṇ]_{NOM}[aC]_{LOK}
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/__ [aC]

Phonologische Regeln

moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C_D$$

Pāṇinis lineare Kodierung

A + Genitivendung, B + Nominativendung,

C + Ablativendung, D + Lokativendung.

Beispiel

- *Sūtra* 6.1.77: *iko yaṇaci* (इको यणचि)
- Analyse: [ik]_{GEN}[yaṇ]_{NOM}[aC]_{LOK}
- moderne Schreibweise: [iK] → [yN]/__ [aC]

Metaregeln legen den Gebrauch der Kasusmarker fest

Beispiel einer Metaregel

Sūtra 1.1.49 *ṣaṣṭhī sthāneyogā* (षष्ठी स्थानेयोगा)

„Der Genitiv in einem *Sūtra* bezeichnet dasjenige, an dessen Stelle etwas treten soll.“

Pāṇini's Śivasūtras

अइउण्। ऋलृक्। एओङ्। ऐऔच्। हयवरट्।
 लण्। ञमङणनम्। झभञ्। घढधष्। जबगडदश्।
 खफछठथचटतव्। कपय्। शषसर्। हल्।

a·i·uṅ | ṛ·lṛk | e·oṅ | ai·auc | hayavarat |
laṅ | ṅamaṅaṅanam | jhabhañ | ghadhadhaṣ | jabagaḍadaś |
khaphachathathacaṭataṅ | kapay | śaśasar | hal |

Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			N	अइउण्। ऋलृक्।
2.				r	!	K	<i>a·i·uṅ ṛ·lṛk </i>
3.		e	o			Ñ	एओङ्। ऐऔच्।
4.		ai	au			C	<i>e·oñ ai·auc </i>
5.	h	y	v	r		T	हयवरट्। लण्।
6.					l	N	<i>hayavarat laṅ </i>
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M	ऋमङ्णनम्। झभञ्।
8.	jh	bh				Ñ	<i>ñamaṅṇanam jhabhañ </i>
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ	घढधष्। जबगडदश्।
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ	<i>ghadhadhaṣ jabagaḍadaś </i>
11.	kh	ph	ch	ṭh	th		<i>ghadhadhaṣ jabagaḍadaś </i>
			c	ṭ	t	V	खफछठथचटतव्।
12.	k	p				Y	<i>khaphachathathacaṭatav </i>
13.			ś	ṣ	s	R	कपय्। शषसर्। हल्।
14.	h					L	<i>kapay śaṣasar hal </i>

Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			Ṇ
2.				r	!	K
3.		e	o			Ṇ̇
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ̇
7.	ñ	m	ṇ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				Ñ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṩ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

अइउण्। ऋलृक्।

a·i·uṅ | ṛ·lṛ

एओङ्। ऐऔच्।

e·oṅ | ai·auc

हयवरट्। लण्।

hayavarat | laṅ

ऋमङणनम्। झभञ्।

ṛmaṅṇanam | jhabhañ

घढधष्। जबगडदश्।

ghadhadhaṣ | jabagaḍadaś

खफछठथचटतव्।

khaphachathathacaṭatav

कपय्। शषसर्। हल्।

kapay | śaṣasar | hal

Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			Ṇ
2.				r	!	K
3.		e	o			Ṇ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				Ñ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

Marker
(Anubandhas)

अइउण्। ऋलृक्।

a·i·uṅ | ṛ·lṛk |

एओङ्। ऐऔच्।

e·oṅ | ai·auc |

हयवरट्। लण्।

hayavarat | laṅ |

ऋमङणनम्। झभञ्।

ṛmaṅṇanam | jhabhañ |

घढधष्। जबगडदश्।

ghaḍhadhaṣ | jabagaḍadaś |

खफछठथचटतव्।

khaphachathathacaṭatav |

कपय्। शषसर्। हल्।

kapay | śaṣasar | hal |

Śivasūtras in tabellarischer Form

1.	a	i	u			Ṇ
2.				r	!	K
3.		e	o			Ṇ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ
7.	ñ	m	ṇ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				Ñ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

Marker
(Anubandhas)

अइउण्। ऋलृक्।

a·i·uṅ | ṛ·lṛ

एओङ्। ऐऔच्।

e·oṅ | ai·auc

हयवरट्। लण्।

hayavarat | laṅ

जमङणनम्। झभञ्।

ñamaṅṅanam | jhabhañ

घढधष्। जबगडदश्।

ghaḍhadhaṣ | jabagaḍadaś

खफछठथचटतव्।

khaphachathathacaṭatav

कपय्। शषसर्। हल्।

kapay | śaṣasar | hal

Pratyāhāras

1.		a	i	u						Ṇ
2.					r	!				Ḳ
3.			e	o						Ṇ̇
4.			ai	au						Ḷ
5.		h	y	v	r					Ṣ

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.

Pratyāhāras

1.		a	i	u				Ṇ
2.					r	!		K
3.			e	o				Ṇ
4.			ai	au				C
5.		h	y	v	r			Ṭ

iK

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.

Pratyāhāras

1.	a	i	u	Ṇ
2.			r	Ḳ
3.		e	o	Ṇ̇
4.		ai	au	C
5.	h	y	v	Ṭ

$$iK = \langle i, u, r, ! \rangle$$

- Ein *Pratyāhāra* ist ein Laut-Marker-Paar.
- Er denotiert die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras* in dem Intervall von dem Laut bis zu dem Marker.

Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/__ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	K
3.			e	o		Ṇ
4.			ai	au		C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/__ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/__ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/__ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	K
3.		e	o			Ṇ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/__ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/__ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

Analyse von iko yaṅaci: [iK] → [yN]/__ [aC]

1.	a	i	u		Ṇ
2.				ṛ	ḷ
3.			e	o	Ṇ̇
4.			ai	au	C
5.	h	y	v	r	Ṭ
6.				l	Ṇ̇

- [iK] → [yN]/__ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/__ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

Analyse von iko yañaci: [iK] → [yN]/__ [aC]

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	K
3.		e	o			Ṇ
4.		ai	au			C
5.	h	y	v	r		Ṭ
6.					l	Ṇ

- [iK] → [yN]/__ [aC]
- ⟨i, u, ṛ, ḷ⟩ → ⟨y, v, r, l⟩/__ ⟨a, i, u, ṛ, ḷ, e, o, ai, au⟩
- „Einfache Vokale außer *a* werden unmittelbar vor nicht homorganen Vokalen durch ihre Halbvokale substituiert.“

Die in den *Aṣṭādhyāyī* vorkommenden *Pratyāhāras*

	<i>Pratyāhāra</i>		<i>Sūtra</i>		<i>Pratyāhāra</i>		<i>Sūtra</i>
1.	aK	अक्	6.1.101.	22.	jhaY	झय्	5.4.111.
2.	aC	अच्	1.1.10.	23.	jhaR	झर्	8.4.65
3.	aT	अट्	8.3.3.	24.	jhaL	झल्	6.1.180
4.	aṆ	अण्	1.1.51.	25.	jhaŚ	झश्	8.4.53.
5.	aṆ	अण्	1.1.69.	26.	jhaṢ	झष्	8.2.37.
6.	aM	अम्	8.3.6.	27.	baŚ	बश्	8.2.37.
7.	aL	अल्	1.1.56	28.	bhaŚ	भश्	8.2.37.
8.	aŚ	अश्	8.3.17.	29.	maY	मय्	8.3.33.
9.	iK	इक्	1.1.3.	30.	yaṆ	यञ्	7.3.101.
10.	iC	इच्	6.1.104.	31.	yaṆ	यण्	1.1.45.
11.	iṆ	इण्	2.4.45	32.	yaM	यम्	8.4.64.
12.	uK	उक्	8.1.70.	33.	yaY	यय्	8.4.58.
13.	eṆ	एण्	6.1.69.	34.	yaR	यर्	8.4.45.
14.	eC	एच्	1.1.48.	35.	*rĀ	रअ	1.1.51.
15.	aiC	ऐच्	7.8.8.	36.	raL	रल्	1.2.26.
16.	khaY	खय्	7.4.61.	37.	vaL	वल्ल	6.1.66.
17.	khaR	खर्	8.4.55	38.	vaŚ	वश्	7.2.8.
18.	ṇaM	णम्	8.3.32.	39.	śaR	शर्	7.4.4.
19.	caR	चर्	8.4.54.	40.	śaL	शल्ल	3.1.45.
20.	chaV	छव्	8.3.7.	41.	haL	हल्	3.1.12.
21.	jaŚ	जश्	8.2.39.	42.	haŚ	हश्	6.1.64.

Ist *rĀ ein Pratyāhāra?

1.1.51 *uraṅ raparaḥ* (उरण् रपरः)

PP: *uḥ aṅ ra-paraḥ* (उः अण् र-परः)

Analyse

- Vasu 1891: ṛ-GEN aṅ r-paraḥ (gefolgt von *r*) – „Wenn ṛ durch {*a, i, u*} ersetzt wird, so wird es von *r* gefolgt.“ → *ar* ist der *Guṇa* von *ṛ*.
- Katre 1987: ṛ-GEN aṅ rĀ-paraḥ → *ar* ist der *Guṇa* von *ṛ* und *a* ist der *Guṇa* von *!*.

Bewertung

- Nach Vasu ist die fehlende *Guṇa*-Form von *!* eine Lücke in den *Aṣṭādhyāyī*.
- Nach Katre ist rĀ ein *Pratyāhāra* und das 6. *Sūtra* heißt nicht *laṅ* (*a* Bindevokal), sondern *IĀṅ* (Ā *Anubandha*) ⇒ in dem 5. *Sūtra* folgen zwei *Anubandhas* aufeinander!

Statements zu den Śivasūtras

Boethlingk 1887

Die Anordnung der *Sūtra* kann uns hier und da befremden, ist aber streng durchdacht und in bewunderungswürdiger Weise durchgeführt. Erstrebt wird die möglichste Kürze und Vermeidung aller Wiederholungen, und dieses wird ohne allen Zweifel erreicht.

Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

Faddegon 1929

Proposition I: The Śiva-Sūtra has a double purport. The chief purport is a phonetical classification. The sūtra presupposes the traditional alphabet and together with this alphabet affords the means for a concise phonetical terminology. In this respect the Śiva-Sūtra deserve praise.

Proposition II: The subordinate purport of the Śiva-Sūtra is to afford the means of formulating concisely euphonic and morphological rules. Although on the whole very interesting and ingenious, this grammatical use of the Śiva-Sūtra in many cases degenerates into subtlety.

In the case of the contact-consonants, namely, the alphabet shows a more logical order than the sūtra, while at the same time we can prove that the illogical order of the sūtra is due to the desire of obtaining pratyāhāras which may be useful for the formulation of the phonetical and morphological rules.

[S]till I am inclined to think that a more complete analysis of only this introductory sūtra might show that even in the subtlety of Pāṇini there lies genius

Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

Misra 1966

The arrangement of *Śiva Sūtras* is thus more in consonance with the structural framework of the whole grammar than with phonetic criteria, and as such the defence put forth by Thieme, 'The arrangement of Pāṇini's list of sounds is explainable as due to the phonetic catalogue of sounds having been adopted to the practical requirements of the grammar in which Pāṇini wanted to refer to certain groups of sounds by short expressions,' [Thieme 1935] needs a modification. It is not a *phonetic catalogue*; [e. g.] the grouping of *h* with *y v r l* on one hand and with *ś ṣ s* on the other is based not so much on phonetic qualities of *h* as on its peculiar behaviour as initial and final on one hand, and medial on the other.

Zitate zum Aufbau der Śivasūtras

Kiparsky 1991

The reasoning from economy goes like this. To be grouped together in a *pratyāhāra*, sounds must make up a continuous segment of the list. Economy requires making the list as short as possible, which means avoiding repetitions of sounds, and using as few markers as possible.

Erklärungen zum Aufbau der Śivasūtras

- Ökonomieprinzip + Logik des speziellen und des generellen Falls (Kiparsky 1991)
- Prinzip der homorganischen Kontinuität (Staal 1962)
- Prinzip der historischen Kontinuität (Cardona 1962)

Varga-System (ca. 700 v. Chr.)

Vokale	a	ā	i	ī	u	ū	ṛ	ṝ	ḷ
	e	o	ai	au					
Konsonanten									
<i>Sparśa:</i>	k		kh		g		gh		ṅ
	c		ch		j		jh		ñ
	ṭ		ṭh		ḍ		ḍh		ṇ
	t		th		d		dh		n
	p		ph		b		bh		m
<i>Antaḥsthā:</i>	y		r		l		v		
<i>Ūṣman:</i>	ś		ṣ		s		h		
zusätzliche Laute:									
<i>Anusvāra:</i>	ṁ								
<i>Visarga:</i>	ḥ								
<i>Jihvāmūlīya:</i>	ḥ								
<i>Upadhmānīya:</i>	ḥ								

Desphande 1995

Minimalitätskriterium

Gesamtliste:

a i u Ṇ ṛ ḷ K e o ṅ a i a u C h y v r Ṭ ḷ Ṇ ñ m ṇ ṅ n M j h b h ṅ g h ḍ h dh Ṣ
j b g ḍ d Ṣ kh ph ch ṭh th c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist
⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!

Minimalitätskriterium

Lautliste:

aiu ṛ! eo aiau hyvr l ñmñṇn jh bh gh ḍh dh
 jbgḍd khphchṭhthcṭt kp śṣs h

Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist
 ⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!

Possible minimality criteria

total list:

a i u Ṛ ṛ | K e o Ṇ a i a u C h y v r Ṭ | Ṇ ñ m ṇ ṅ n M j h b h ṅ gh ḍ h dh Ṣ
j b g ḍ d Ṣ kh ph ch ṭh th c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

- 1 total list is of minimal length;
- 2 total list is as short as possible while the marker list is minimal;
- 3 total list is as short as possible while the sound list is minimal;

Possible minimality criteria

marker list:

a i u Ṇ ṛ | K e o Ṇ a i a u C h y v r Ṭ | Ṇ ñ m ṇ ṇ n M j h b h Ṇ ḡ ḍ h d h Ṣ
j b ḡ ḍ d Ṣ k h p h c h ṭ h t h c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

- 1 total list is of minimal length;
- 2 total list is as short as possible while the marker list is minimal;
- 3 total list is as short as possible while the sound list is minimal;

Possible minimality criteria

sound list:

a i u Ṇ ṛ | K e o Ṇ a i a u C h y v r Ṭ | Ṇ ñ m ṇ ṇ n M j h b h Ṇ ḡ ḥ ḍ h ḍ h Ṣ
j b ḡ ḍ ḍ Ṣ k h p h c ḥ ṭ h t h c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

- 1 total list is of minimal length;
- 2 total list is as short as possible while the **marker list is minimal**;
- 3 total list is as short as possible while the **sound list is minimal**;

Possible minimality criteria

a i u Ṇ ṛ | K e o Ṇ a i a u C h y v r Ṭ | Ṇ ñ m ṇ ṇ n M j h b h Ṇ ḡ ḍ h d h Ṣ
j b ḡ ḍ d Ṣ k h p h c ḥ ṭ h t h c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

- 1 total list is of minimal length;
- 2 total list is as short as possible while the marker list is minimal;
- 3 total list is as short as possible while the sound list is minimal;

Possible minimality criteria

a i u **N** ṛ | **K** e o **Ñ** a i a u **C** h y v r **Ṭ** | **N** ñ m ṇ ṅ n **M** j h b h **Ñ** g h ḍ h d h **Ṣ**
 j b g ḍ d **Ṣ** k h p h c h ṭ h t h c ṭ t **V** k p **Y** ś ṣ s **R** h **L**

- 1 total list is of minimal length;
- 2 total list is as short as possible while the **marker list is minimal**;
- 3 total list is as short as possible while the **sound list is minimal**;

Among others, Kiparsky (1991), Cardona (1969), and Staal (1962) argue in favor of the 3rd criterion

Independence of minimality criteria

example	minimality criterion		
	total list	marker list	sound list
$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\},$ $\{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\}$ <i>gfea</i> M ₁ <i>b</i> M ₂ <i>c</i> M ₃ <i>d</i> M ₄ <i>gfea</i> M ₁ <i>dcba</i> M ₂	– (11)	– (4)	+ (7)
$\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c, g\}\}$ <i>gabc</i> M ₁ <i>d</i> M ₂ <i>fcde</i> M ₃ <i>gabc</i> M ₁ <i>d</i> M ₂ <i>e</i> M ₃ <i>f</i> M ₄	– (12)	+ (3)	– (9)
$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\},$ $\{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\},$ $\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c, g\}\}$ <i>gfea</i> M ₁ <i>dcba</i> M ₂ <i>gabc</i> M ₃ <i>d</i> M ₄ <i>e</i> M ₅ <i>f</i> M ₆	+ (21)	– (6)	– (15)

What does minimal mean?

a·i·uṅ | ṛ·ḷk | e·oṅ | ai·auc | hayavarat |
laṅ | ṅamaṅaṅanam | jhabhañ | ghadhadhaṣ | jabagaḍadaś |
khaphachathathacaṭataṅ | kapay | śaṣasar | hal |

The Śivasūtras are **not minimal** if it is possible to rearrange the Sanskrit sounds in a new list with markers such that

- ① each *Pratyāhāra* forms an interval ending before a marker,
 - ② no sound occurs twice
- or one sound occurs twice but less markers are needed.
- ⇒ duplicating a sound is worse than adding markers

Kiparskys Argumentation

Kiparsky 1991

Consequently, if class A properly includes class B , the elements shared with B should be listed last in A ; the marker that follows can then be used to form *Pratyāhāras* for both A and B . In this way the economy principle, by selecting the shortest grammar, determines both the ordering of sounds and the placement of markers among them.

$aK = \{a, i, u, r, \text{!}\}$, $iK = \{i, u, r, \text{!}\}$ und $uK = \{u, r, \text{!}\} \Rightarrow a < i < u < r, \text{!}$

aber:

$jhL = \{h, s, \text{ṣ}, \acute{s}, p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jhR = \{s, \text{ṣ}, \acute{s}, p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jhY = \{p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$jh\acute{S} = \{d, \text{ḍ}, g, b, j, dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$ und

$jh\text{Ṣ} = \{dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh\}$

$\Rightarrow h < s, \text{ṣ}, \acute{s} < p, k, t, \text{ṭ}, c, th, \text{ṭh}, ch, ph, kh, d < \text{ḍ}, g, b, j < dh, \text{ḍh}, gh, bh, jh$

Staal zum doppelten *h*

Staal 1962

[T]he double occurrence of *h* enables Pāṇini to combine the sound *h* on the one hand with the semivowels, nasals, and voiced stops [...], on the other hand with the fricatives. This reflects the phonetic fact that *h* is the only voiced fricative. The above analysis shows that it was impossible to solve this difficulty in any other way, as the rows could not have been ordered differently.

Aufgabenstellung

Fragen

in bezug auf die konkreten *Śivasūtras* Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis *Śivasūtras* minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der *Śivasūtras* ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

Aufgabenstellung

Fragen

in bezug auf die konkreten *Śivasūtras* Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis *Śivasūtras* minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der *Śivasūtras* ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

Lösung des Problems mit erschöpfender Suche?

Für jede beliebige Menge von Mengen gibt es eine von Markern unterbrochenen Liste, so daß sich jede der Mengen als *Pratyāhāra* darstellen läßt:

Sei $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ eine Menge von Mengen mit $S_i = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{n_i}}\}$ und $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ eine Menge mit $M \cap S_i = \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist

$$s_{1_1}, \dots, s_{1_{n_1}}, M_1, s_{2_1}, \dots, s_{2_{n_2}}, M_2, \dots, M_{n-1}, s_{n_1}, \dots, s_{n_{n_n}}, M_n$$

eine solche Liste. *Pratyāhāra* von S_i : $s_{i_1} M_i$

⇒ obere Schranke für Länge der *Anubandha*- und Länge der Lautliste

Beispiel: $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\}$

$$abM_1abcM_2abcdM_3aeM_4aefM_5aefgM_6$$

Lösung des Problems mit erschöpfender Suche?

Erschöpfende Suche

- n = Zahl der Laute, v = obere Schranke für Zahl benötigter Verdopplungen:
- Bilde alle Lautlisten mit Längen zwischen n und $n + v$.
- Unterbreche die Listen mit *Anubandhas* (keine zwei nebeneinander).
- Entferne alle Listen, in denen die Mengen keine Intervalle bilden.
- Wähle die Listen, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllen.

$$\text{Zahl zu bildender Listen: } \sum_{k=0}^v 2^{n+k} (n+k)! \binom{n+k-1}{k}$$

Für Pāṇinis *Pratyāhāras* ($n = 42$, $v = 1$): 10^{67}

Lösung des Problems mit erschöpfender Suche? (Details)

Zahl aller Lautlisten der Länge $n + v_1$ ($0 \leq v_1 \leq v$), wenn feststeht, welche der n Laute verdoppelt werden:

$$(n + v_1)!$$

Zahl der Möglichkeiten, die zu verdoppelnden Elemente zu wählen:

$$\binom{n + v_1 - 1}{v_1} \quad \left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

⇒ Lautlisten, in denen nicht mehr als v Elemente doppelt vorkommen:

$$\sum_{k=0}^v (n+k)! \binom{n+k-1}{k}$$

Da keine zwei Marker direkt aufeinander folgen sollen, gibt es für eine Lautliste mit n Elementen genau 2^n Möglichkeiten sie mit Markern zu unterbrechen. Zahl insgesamt zu bildender Listen:

$$\sum_{k=0}^v 2^{n+k} (n+k)! \binom{n+k-1}{k}$$

Minimalitätskriterium

Gesamtliste:

a i u Ṇ ṛ | K e o Ṇ a i a u C h y v r Ṭ | Ṇ ñ m ṇ ṇ n M j h b h Ṇ ḡ ḥ ḍ ḥ ḍ ḥ Ṣ
j b ḡ ḍ ḍ Ṣ k h p h c h ṭ h t h c ṭ t V k p Y ś ṣ s R h L

Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist
⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!

Minimalitätskriterium

Lautliste:

aiu ṛḷ eo aiau hyvr l ñmñṇn jh bh gh ḍh dh
 jbgḍd kh ph ch ṭh th cṭt kp śṣs h

Minimalitätskriterium:

Möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist
 ⇒ Verdoppelte Elemente wiegen schwerer als zusätzliche Marker!

Aufgabenstellung

Fragen

in bezug auf die konkreten *Śivasūtras* Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis *Śivasūtras* minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der *Śivasūtras* ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

Aufgabenstellung

Fragen

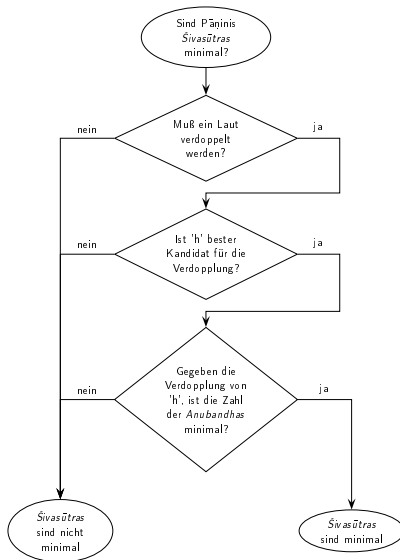
in bezug auf die konkreten *Śivasūtras* Pāṇinis:

- Sind Pāṇinis *Śivasūtras* minimal? Wenn ja, läßt sich dies mathematisch beweisen?

in bezug auf allgemeine Mengen von Mengen:

- Kann für jede Menge von Mengen entschieden werden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der *Śivasūtras* ohne doppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra* repräsentiert werden kann? Wie kann eine solche Liste konstruiert werden?
- Wenn Verdopplungen unumgänglich sind, wie kann dann deren Zahl minimiert werden?
- Wie kann die Zahl der benötigten Marker minimiert werden?

Flußdiagramm



Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) : $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

Markermenge

totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) : $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

Markermenge

totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) : $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

Markermenge

totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma$

Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$

S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) : $a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5$

Lautmenge

totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma$

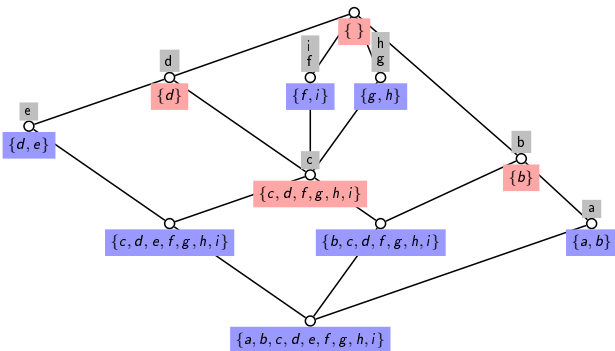
Markermenge

$\Rightarrow (\mathcal{A}, \Phi)$ ist ohne Verdopplung S-darstellbar

Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\},$
 $\{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$



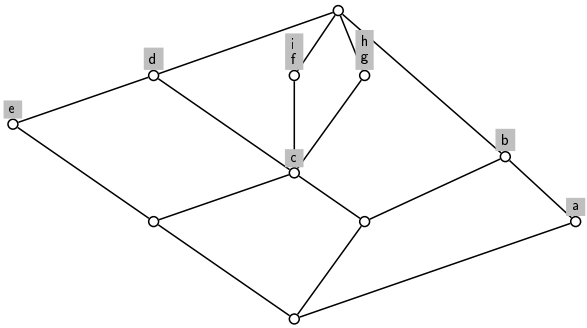
(\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband

► Details

Grundbegriffe: S-Darstellbarkeit

Lautklassensystem (\mathcal{A}, Φ) : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{f, i\}, \{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$



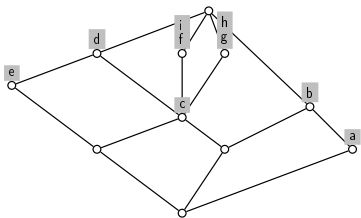
(\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband

► Details

S-Darstellbarkeit \Rightarrow Plättbarkeit

Hauptsatz der S-Darstellbarkeit (Teilaussage 1)

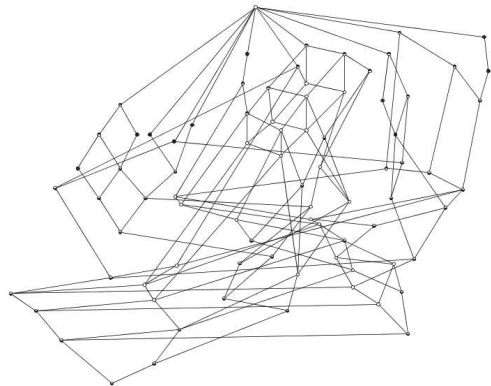
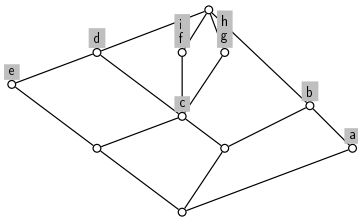
Wenn (\mathcal{A}, Φ) ohne Verdopplung S-darstellbar ist, dann ist der (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband ein plättbarer Graph.



S-Darstellbarkeit \Rightarrow Plättbarkeit

Hauptsatz der S-Darstellbarkeit (Teilaussage 1)

Wenn (\mathcal{A}, Φ) ohne Verdopplung S-darstellbar ist, dann ist der (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband ein plättbarer Graph.

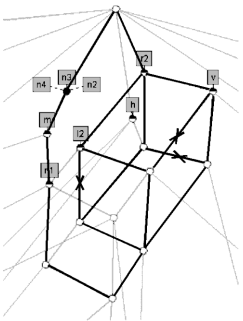


Graph von Pāṇinis *Pratyāhāra*-Begriffsverband

Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

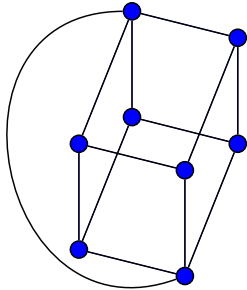
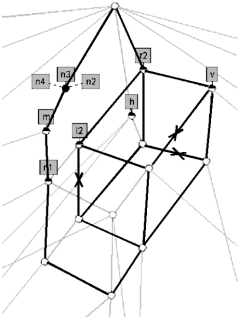
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

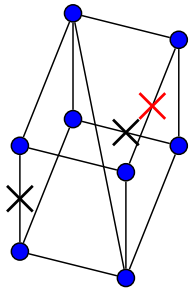
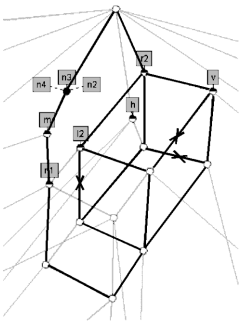
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

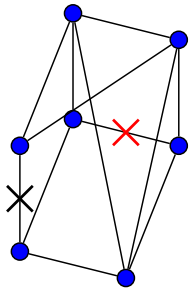
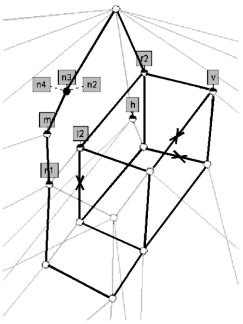
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

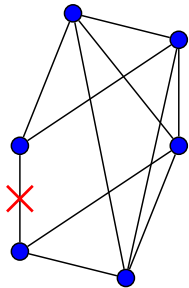
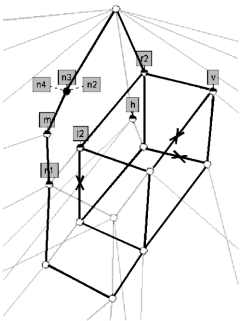
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

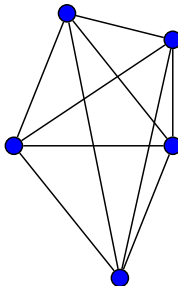
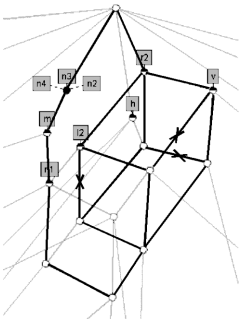
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

Satz von Kuratowski

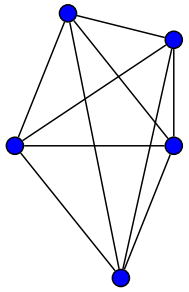
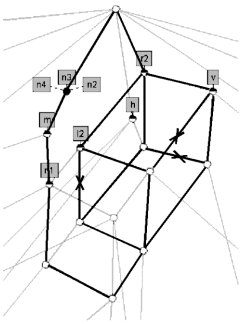
Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.



Nicht-S-Darstellbarkeit des *Pratyāhāra*-Lautklassensystems

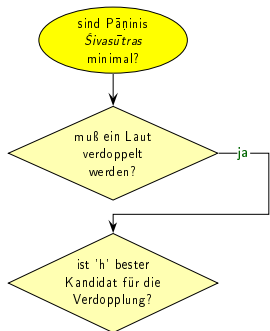
Satz von Kuratowski

Ein Graph, der den Graphen  als Minor hat, ist nicht plättbar.

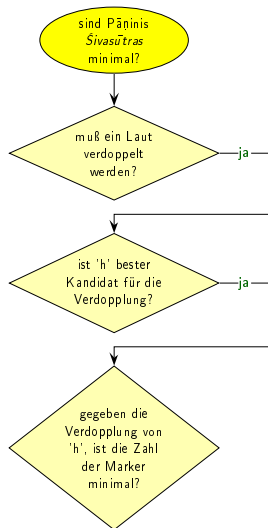


Das von Pāṇinis *Pratyāhāras* denotierte Lautklassensystem ist ohne Verdopplung nicht S-darstellbar!

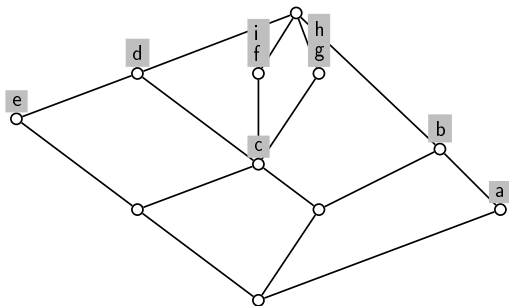
Flußdiagramm



Flußdiagramm



S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

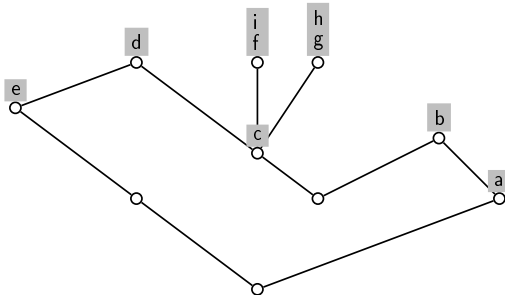


Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

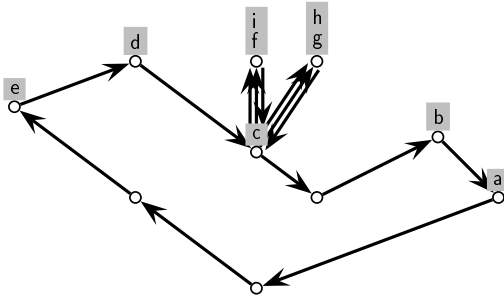


Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den **S-Graphen**:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

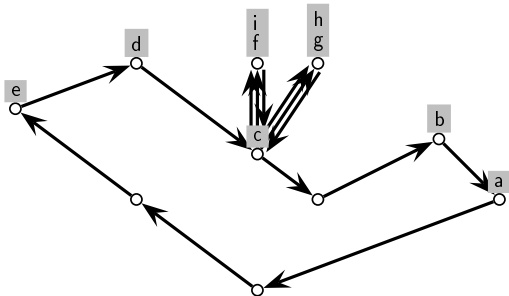


Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und **laufe** durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern

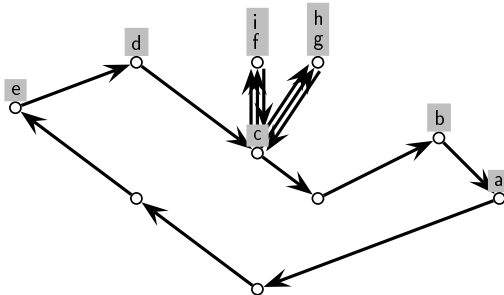


Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



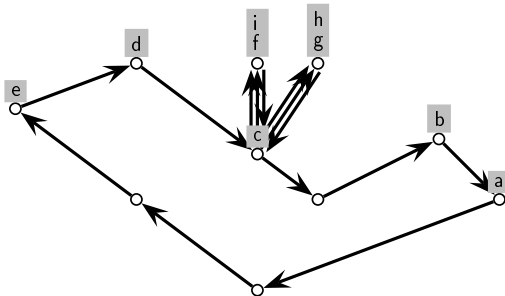
e

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



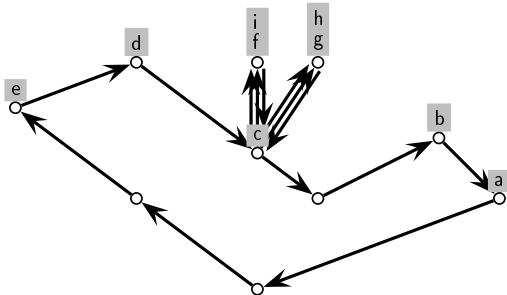
ed

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



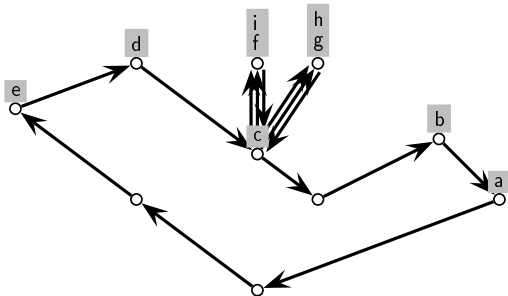
edM₁c

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



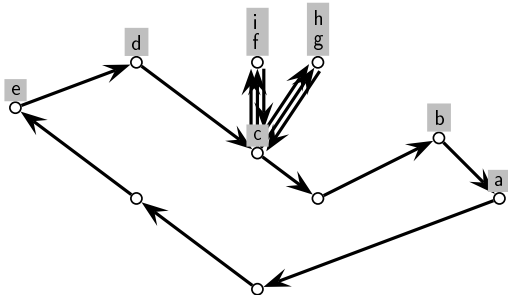
edM₁cfi

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



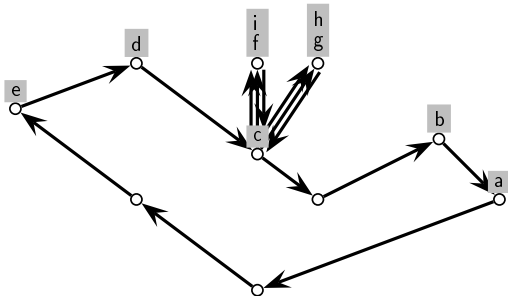
edM_1cfiM_2

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



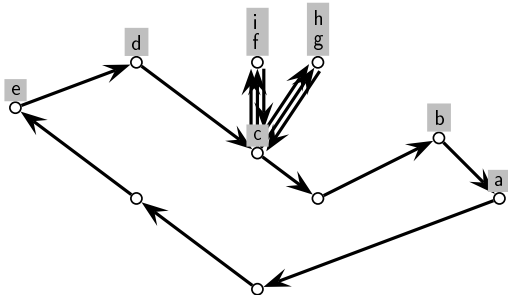
$edM_1c fiM_2gh$

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



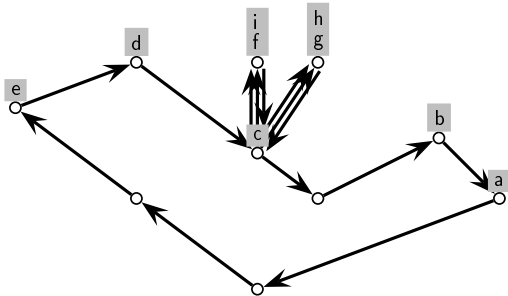
$edM_1c fiM_2ghM_3$

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



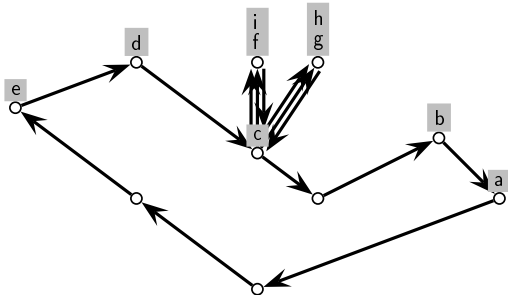
$edM_1c fiM_2ghM_3b$

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



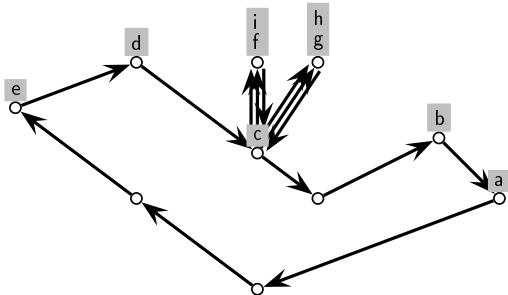
$edM_1c fiM_2ghM_3bM_4a$

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- **Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an**, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- **Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an**, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

S-Alphabete mit minimaler Zahl von Markern



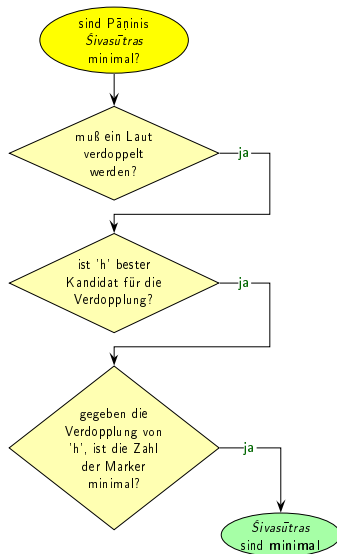
$edM_1c fiM_2ghM_3bM_4aM_5$

Verfahren

Beginne mit der leeren Sequenz und laufe durch den S-Graphen:

- Wenn es aufwärts geht, verändere die Sequenz nicht.
- **Wenn es abwärts geht, füge einen Marker an**, außer wenn das letzte Element bereits ein Marker ist.
- Wenn ein Laut erreicht wird, füge ihn an, außer wenn der Laut bereits zuvor angefügt wurde.

Flußdiagramm



Fazit

Ergebnisse

- Pāṇinis *Śivasūtras*:
 - Pāṇinis *Śivasūtras* sind minimal
 - mathematischer Beweis
- allgemeine S-Darstellbarkeit:
 - vollständige Charakterisierung
 - 3 äquivalente, hinreichende Bedingungen

Are we really done?

The story is much more intricate

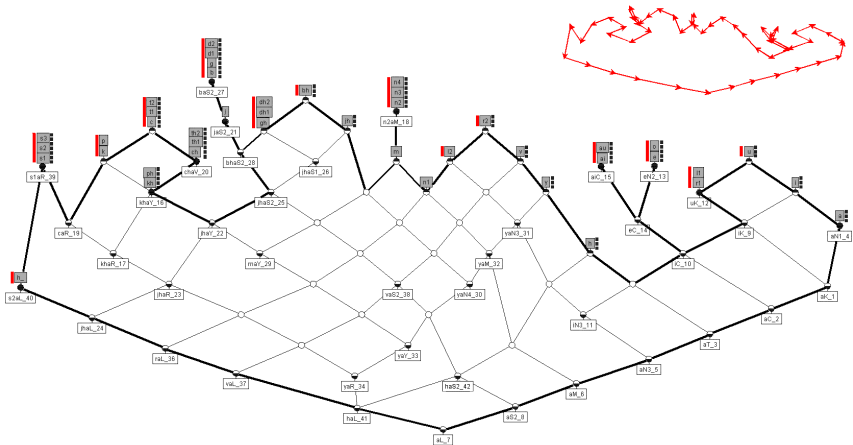
- We have **neither** shown that Pāṇini's technique for the representation of sound classes is optimal
- **nor** that he has used his technique in an optimal way.
 - not all sound classes are denoted by *Pratyāhāras*
 - rules overgeneralize
 - *Sūtra* 1.3.10: *yathāsaṃkhyamanudeśaḥ samānām* → *Pratyāhāras* denote lists and not sets.

Are we really done?

The story is much more intricate

- We have **neither** shown that Pāṇini's technique for the representation of sound classes is optimal
- **nor** that he has used his technique in an optimal way.
 - not all sound classes are denoted by *Pratyāhāras*
 - rules overgeneralize
 - *Sūtra* 1.3.10: *yathāsaṃkhyamanudeśaḥ samānām* → *Pratyāhāras* denote lists and not sets.

How many alternatives for the Śivasūtras are there?



How many alternatives for the Śivasūtras are there?

$\langle a, i, u, M_1, \{r, l\}_1, M_2, \{\langle\{e, o\}_2, M_3\rangle, \langle\{ai, au\}_3, M_4\rangle\}_4,$
 $h, y, v, r, M_5, l, M_6, \tilde{n}, m, \{\dot{n}, \eta, n, \}_5, M_7, jh, bh, M_8,$
 $\{gh, \dot{d}h, dh\}_6, M_9, j, \{b, g, \dot{d}, d\}_7, M_{10}, \{kh, ph\}_8, \{ch, \dot{t}h, th\}_9,$
 $\{c, \dot{t}, t\}_{10}, M_{11}, \{k, p\}_{11}, M_{12}, \{\acute{s}, \mathring{s}, s\}_{12}, M_{13}, h, M_{14}\rangle$

$$\begin{aligned}
 & \{1\}_1 \quad \{2\}_2 \quad \{2\}_3 \quad \{2\}_4 \quad \{3\}_5 \quad \{3\}_6 \quad \{4\}_7 \quad \{2\}_8 \quad \{3\}_9 \quad \{3\}_{10} \quad \{2\}_{11} \quad \{3\}_{12} \\
 & = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 24 \times 2 \times 6 \times 6 \times 2 \times 6 = 11\,943\,936
 \end{aligned}$$

How many alternatives for the Śivasūtras are there?

$$\langle a, i, u, M_1, \{r, \ell\}_1, M_2, \{\langle e, o \rangle_2, M_3\}, \langle \{ai, au\}_3, M_4 \rangle_4, \\ h, y, v, r, M_5, l, M_6, \tilde{n}, m, \{\dot{n}, \eta, n\}_5, M_7, jh, bh, M_8, \\ \{gh, \dot{d}h, dh\}_6, M_9, j, \{b, g, \dot{d}, d\}_7, M_{10}, \{kh, ph\}_8, \{ch, \dot{t}h, th\}_9, \\ \{c, \dot{t}, t\}_{10}, M_{11}, \{k, p\}_{11}, M_{12}, \{\acute{s}, \dot{s}, s\}_{12}, M_{13}, h, M_{14} \rangle$$

aiu **N** ṛ|K eo **Ñ** aiau **C** hyvr **T** | **N** ñ m ṇ n **M** jh bh **Ñ** gh ḍh dh **Ṣ** j b g ḍ d **Ṣ**
khphchṭhthcṭt **V** kp **Y** śṣs **R** h **L**

6.1.77 *iK-ah yaN aC-i*: $[r, \ell] \cong [r, \ell]$

1.1.48 *eCa iK hrasva ādeśe*: $\langle i, u \rangle \cong [e, o]$

8.4.53 *jhaL-ām jaŚ jhaŚ-i*: $\langle b, [g, \dot{d}, d] \rangle \cong [bh, [gh, \dot{d}h, dh]]$

1.1.1 + *vṛd-dhir āT aiC* +

6.1.88 *vṛd-dhi-r eC-i*: $[e, o] \cong [ai, au]$

⇒ 62.208 possible alternatives.

Some more numbers

- Pāṇini denotes 41 (42) sound classes by *Pratyāhāras*.
- The *Śivasūtras* allow the construction of 281 *Pratyāhāras*.
- $2^{42} - 43$ ($> 2 \cdot 10^{12}$) possible sound classes.
- Pāṇini has chosen 1 out of at least 62.208 minimal S-alphabets
- The 42 sounds can be ordered in nearly $43!$ ($> 6 \cdot 10^{52}$) lists in which h occurs twice (including marker placement, there are more than 10^{67} possibilities).

Operationale Regeln

moderne Schreibweise

A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt.

$$A \rightarrow B / C_D$$

Beispiel

Auslautverhärtung im Deutschen (Hunde – Hund).

$$[d] \rightarrow [t] / _ \#, [b] \rightarrow [p] / _ \#, [g] \rightarrow [k] / _ \#, \dots$$

Generalisierte Regel:

$$\left[\begin{array}{l} + \text{ konsonantisch} \\ - \text{ nasal} \\ + \text{ stimmhaft} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} + \text{ konsonantisch} \\ - \text{ nasal} \\ - \text{ stimmhaft} \end{array} \right] / _ \#$$

Distinktive Merkmale vs. *Pratyāhāras*

Anforderungen Kornai 1993:

- ① Die Menge der repräsentierbaren Klassen soll klein sein im Vergleich zur Menge aller möglichen Lautklassen.
- ② Die Schnittmenge zweier repräsentierbarer Klassen soll eine repräsentierbare Klasse sein.

Pāṇinis *Pratyāhāra*-Methode:

- ① 305 (281, wenn 1-elementige ausgeschlossen werden) darstellbare Klassen zu $2^{42} - 43$ möglichen Lautklassen

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} \quad (\text{worst case für } n \text{ Laute})$$

- ② Abschluß unter Schnittbildung (Ausnahmen durch doppeltes h : $vL \cap aM$ nicht darstellbar)

Distinktive Merkmale vs. *Pratyāhāras*

Anforderungen Kornai 1993:

- ① Die Menge der repräsentierbaren Klassen soll klein sein im Vergleich zur Menge aller möglichen Lautklassen.
- ② Die Schnittmenge zweier repräsentierbarer Klassen soll eine repräsentierbare Klasse sein.

Repräsentation mit binären Merkmalen:

- ① Zur Repräsentation der Denotationen von Pāṇinis *Pratyāhāras* werden mind. 11 binäre Merkmale benötigt ($ba\acute{S} \subset ja\acute{S} \subset bha\acute{S} \subset jha\acute{S} \subset jhaY \subset jhaR \subset jhaL \subset raL \subset vaL \subset haL \subset aL$)
11 binären Merkmalen \Rightarrow 2048 Klassen
- ② Abschluß unter Schnittbildung

Distinktive Merkmale vs. *Pratyāhāras*

Vorteile der *Pratyāhāra*-Methode:

- Restriktivität (s. o.)
- ökonomische Klassenbenennung (je 1 Silbe)
- Lineare Repräsentation hierarchischer Beziehungen
⇒ Fragen über hierarchische Relationen zwischen Klassen können beantwortet werden, ohne auf die Elemente der Klassen zugreifen zu müssen.
- Das Problem der Auswahl und Benennung von Merkmalen wird vermieden
Die Anordnung der Laute in der *Śivasūtra*-Liste reflektiert ihr Verhalten in phonologischen Prozessen, ohne die Einführung von möglicherweise arbiträren Merkmalen zu erfordern.
⇒ keine phonetischen Vorannahmen

the problem of choosing binary features

Suppose you want to distinguish 9 objects by 5 binary features.

There are more than 28 million possible sets of 5 binary features which uniquely distinguish the 9 objects $\binom{32}{9}$.

Distinktive Merkmale vs. *Pratyāhāras*

Vorteile der *Pratyāhāra*-Methode:

- Restriktivität (s. o.)
- ökonomische Klassenbenennung (je 1 Silbe)
- Lineare Repräsentation hierarchischer Beziehungen
⇒ Fragen über hierarchische Relationen zwischen Klassen können beantwortet werden, ohne auf die Elemente der Klassen zugreifen zu müssen.
- Das Problem der Auswahl und Benennung von Merkmalen wird vermieden
Die Anordnung der Laute in der *Śivasūtra*-Liste reflektiert ihr Verhalten in phonologischen Prozessen, ohne die Einführung von möglicherweise arbiträren Merkmalen zu erfordern.
⇒ keine phonetischen Vorannahmen

the problem of choosing binary features

Suppose you want to distinguish 9 objects by 5 binary features.

There are more than 28 million possible sets of 5 binary features which uniquely distinguish the 9 objects $\binom{32}{9}$.

Transferring Pāṇinis *Pratyāhāra*-method

Pāṇinis method

- Unique method which is especially economical
- Method developed for a single language
- Testing of applicability to other languages

German as a test case

- Indoeuropean language with a smaller Sandhi-system
- No codified grammatical description
- 7 example processes of German

Phonological processes of German

final devoicing /hʊnd/ 'dog' → [hʊnt]

⟨b, d, g, v, z, ʒ⟩ → ⟨p, t, k, f, s, ʃ⟩ / __ word boundary

umlaut [bal+ə] 'ball' (sg.) + plural → [bɛlə]

⟨u:, ʊ, o:, ɔ, a:, a, aʊ⟩ → ⟨y:, ʏ, ø:, œ, ɛ:, ε, ɔ̥⟩

velar nasal assimilation /ankʊnft/ 'arrival' → [aŋkʊnft]

⟨n⟩ → ⟨ŋ⟩ / __ ⟨k, g⟩

labial nasal assimilation /anbaʊ/ 'outbuilding' → [ambaʊ]

⟨n⟩ → ⟨m⟩ / __ ⟨p, b, p̂f, f, v⟩

glottal stop epenthesis /aɪ/ 'egg' → [ʔaɪ]

⟨⟩ → ⟨ʔ⟩ / word boundary __ vowel

vowel shortening /mo:naeç:i:/ 'monarchy' → [monaeçi:]

⟨i:, y:, e:, ø:, u:, o:⟩ → ⟨i, y, e, ø, u, o⟩ / __ unstressed

palatal fricative assimilation /baç/ 'brook' → [bax]

⟨ç⟩ → ⟨x⟩ / ⟨a:, a, u:, ʊ, o:, ɔ, aʊ⟩ __

Set of 10 German sound classes that have to be described

devoicing input {b, d, g, v, z, ʒ}

devoicing output {p, t, k, f, s, ʃ}

umlaut input {u:, υ, o:, ɔ, a:, a, aʏ}

umlaut output {y:, ʏ, ø:, œ, ε:, ε, ɔ̥}

nasal assimilation velar (right context) {k, g}

nasal assimilation labial (right context) {p, b, p̄f, f, v}

glottal stop epenthesis (right context)

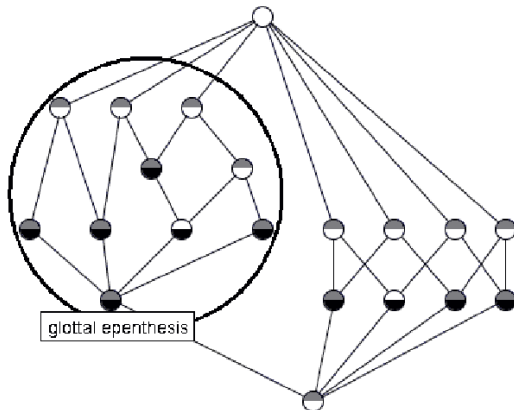
{ʏ, e, ə, i, ε, œ, ɔ, υ, a, i, e, o, u, y, ø, a:, i:, o:, u:, y:, ø:, e:, ḁ, ɔ̥, aʏ, ε:}

vowel shortening input {i:, y:, e:, ø:, u:, o:}

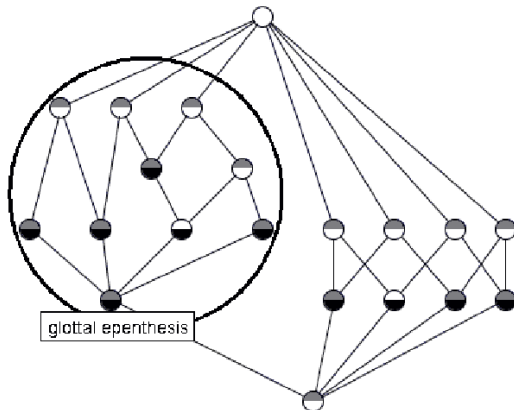
vowel shortening output {i, y, e, ø, u, o}

palatal fricative assimilation {a:, a, u:, υ, o:, ɔ, aʏ}

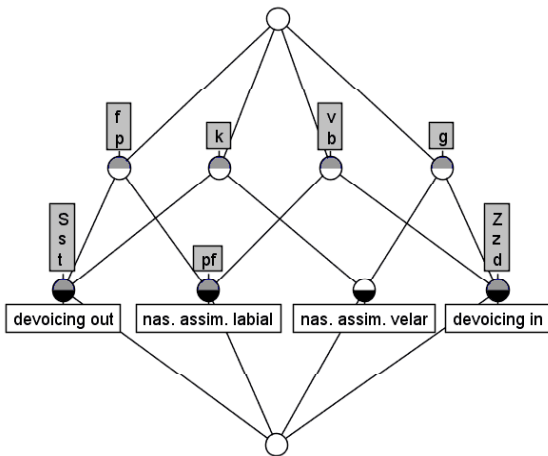
German sound classes: concept lattice



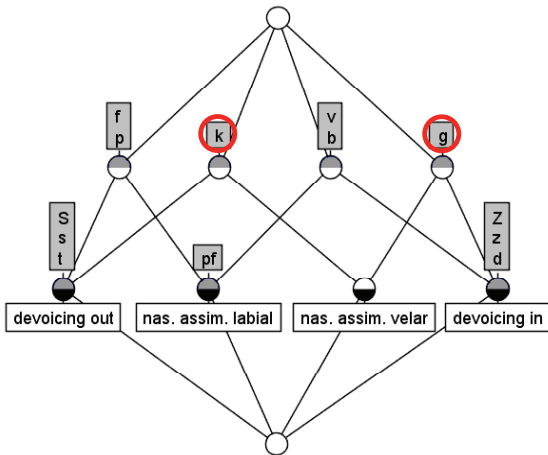
German sound classes: concept lattice



Consonants constitute a non-planar lattice

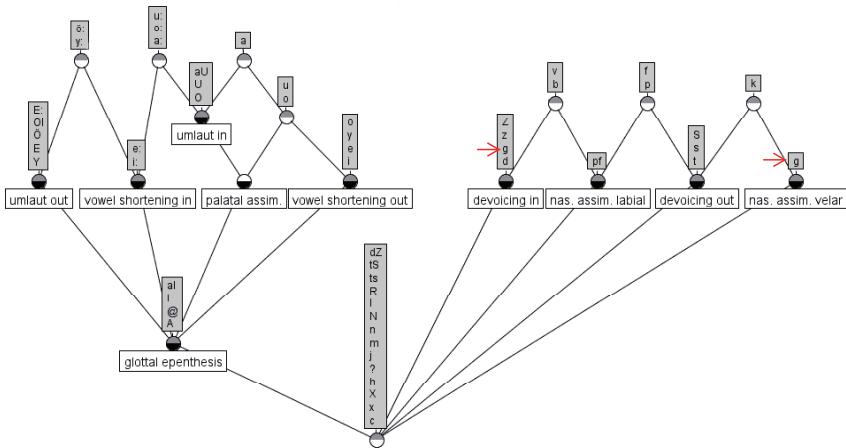


Consonants constitute a non-planar lattice



Duplication of a consonant necessary!

Proposed *pratyāhārasūtras* for German



$\widehat{d}_3 \widehat{t}_j \widehat{t}_s \mathfrak{v} l \eta n m j ? h \zeta x \mathbf{g} k M_1 t s \int f p M_2 \widehat{p} \widehat{b} \widehat{v} M_3 \mathfrak{z} \mathfrak{z} \mathfrak{d} \mathbf{g} M_4$
 $\mathfrak{a} \mathfrak{e} \mathfrak{i} \mathfrak{a}_l \emptyset y e i u o a M_5 \mathfrak{u} \mathfrak{u} \mathfrak{a} \mathfrak{u} \mathfrak{a} : \mathfrak{o} : \mathfrak{u} : M_6 i : e : y : \emptyset : M_7 \mathfrak{e} : \mathfrak{u}_l \mathfrak{a} \mathfrak{e} \mathfrak{y} \mathfrak{e} M_8$

Summary: transfer to German

- The *Pratyāhāra* method is applicable to the description of the sound system of German
- The *Pratyāhāra* method is in some respect superior to the featural description used in phonology (e.g. 12 binary features predict $2^{12} = 4096$ classes, *Pratyāhāra* method predicts 268 classes)
- Our sample of German phonological processes is rather small
- Further languages (e.g. non-Indoeuropean, or with larger Sandhi-systems) have to be investigated

open problems

- *Pratyāhāras* denote **lists** and not sets
- Pāṇini uses a mixture of descriptive techniques (including overgeneralization and rule inheritance)
- the generalizability of the *Pratyāhāra* technique has to be further investigated
- ...

outlook

New research project *Pratyāhāras or features* <http://panini.phil.hhu.de/>
(together with Silke Hamann)

central research questions:

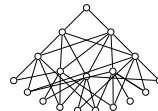
- If one allows all techniques which Pāṇini uses for the description of phonological classes is it still true, that he uses them in the most economical way possible?
- Can we (semi-automatically) construct a Pāṇinian-style description of the phonological system of other languages?
- Pāṇinis S-orders lie in between tree-structures and general hierarchies. Where else could we apply S-orders?



tree








S-sortable



general hierarchy

Literature

-  Böhthlingk, O. (1887), *Pāṇinis Grammatik*. Leipzig, Nachdruck Hildesheim 1964.
-  Ganter, B. & R. Wille (1996), *Formale Begriffsanalyse - Mathematische Grundlagen*. Berlin: Springer.
-  Kiparsky, P. (1991), Economy and the construction of the Śivasūtras. In: M. M. Deshpande & S. Bhate (Ed.), *Pāṇinian Studies*, Michigan: Ann Arbor, (Wieder abgedruckt auf: <http://www.stanford.edu/~kiparsky/Papers/siva-t.pdf>, 15 Seiten).
-  Kiparsky, P. (2002), On the architecture of Pāṇini's grammar, three lectures delivered at the Hyderabad Conference on the Architecture of Grammar, Jan. 2002, and at UCLA, March 2002 (<http://www.stanford.edu/~kiparsky/Papers/hyderabad.pdf>).
-  Petersen, W. (2008), Zur Minimalität von Pāṇinis Śivasūtras – Eine Untersuchung mit Mitteln der Formalen Begriffsanalyse. PhD thesis, university of Düsseldorf.