# Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

## Kombinatorik

Dozentin: Wiebke Petersen

7. Foliensatz

# Kombinatorik

- Thema der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen.
- Typische kombinatorische Aufgaben sind Urnenaufgaben: Wieviele Möglichkeiten gibt es $k$ Kugeln aus einer Urne mit $n$ Kugeln zu ziehen?

# Kombinatorik

- Thema der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen.
- Typische kombinatorische Aufgaben sind Urnenaufgaben: Wieviele Möglichkeiten gibt es $k$ Kugeln aus einer Urne mit $n$ Kugeln zu ziehen?
- Hierbei unterscheidet man
  - ob die gezogenen Kugeln wieder zurückgelegt werden oder nicht, und
  - ob die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, beachtet wird oder nicht.

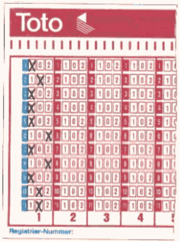
# kombinatorische Grundaufgaben: Beispiele

| | ohne Zurücklegen | mit Zurücklegen |
|---|---|---|
| mit Beachtung der Reihenfolge | 3er-Wette (Rennsport) | Toto |
| ohne Beachtung der Reihenfolge | Lotto / Skat | Eisbecher |

# Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

**Beispiel: Toto (11er-Wette)**

Beispiel: Tippen der Ergebnisse von 11 Fußballspielen (1: Sieg Heimmannschaft, 2: Sieg Gastmannschaft, 0: unentschieden).

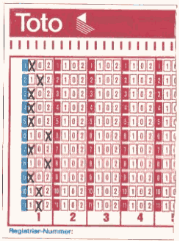



# Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

**Beispiel: Toto (11er-Wette)**

Beispiel: Tippen der Ergebnisse von 11 Fußballspielen (1: Sieg Heimmannschaft, 2: Sieg Gastmannschaft, 0: unentschieden).

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{11} = 177147$$




Es gibt

$$n^k$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Spezialfall: alle Kugeln werden gezogen ($n = k$)

# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

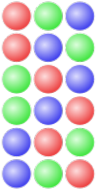
Spezialfall: alle Kugeln werden gezogen ($n = k$)

**Permutationen**

$n$ Objekte lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.
Der Ausdruck $n!$ wird ‚$n$ Fakultät'gelesen.
Als Permutation bezeichnet man eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst.
Zu einer $n$-elementigen Menge gibt es $n!$ Permutationen.
Permutationen sind ein Spezialfall ($k = n$) des ‚Ziehens ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge'

Lineare Anordnungsmöglichkeiten für 3 verschiedenfarbige Kugeln:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$



# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der ersten 3 Plätze bei einem Pferderennen, wenn 10 Pferde starten.

**Beispiel: 3er-Wette Pferderennsport**

# Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Tippen der ersten 3 Plätze bei einem Pferderennen, wenn 10 Pferde starten.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Es gibt
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$
Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten mit Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

**Beispiel: 3er-Wette Pferderennsport**

# Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Lottospiel (6 aus 49)

Beispiel: Skathände (10 aus 32)

**Beispiel: Lotto**

**Beispiel: Skat**

# Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Lottospiel (6 aus 49)

$$\frac{49!}{(49-6)!} : 6! = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \binom{49}{6} = 13983816$$

Beispiel: Skathände (10 aus 32)

$$\frac{32!}{(32-10)!} : 10! = \frac{32!}{(32-10)! \cdot 10!} = \binom{32}{10} = 64512240$$

Es gibt
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

**Beispiel: Lotto**

**Beispiel: Skat**

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$
Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede $k$-Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf $k!$ Arten anordnen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede $k$-Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf $k!$ Arten anordnen.

Folglich gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

verschiedene ungeordnete $k$-Auswahlen aus einer $n$er-Menge ohne Wiederholungen.

# Herleitung: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

Jede $k$-Auswahl ohne Wiederholungen lässt sich auf $k!$ Arten anordnen.

Folglich gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

verschiedene ungeordnete $k$-Auswahlen aus einer $n$er-Menge ohne Wiederholungen.

Die Zahlen $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ sind die Binomialkoeffizienten und werden oft mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet (in Worten ‚$n$ über $k$').

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Eisbecher mit 3 Kugeln aus 10 Eissorten zusammenstellen.

**Beispiel: Eisbecher**

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Eisbecher mit 3 Kugeln aus 10 Eissorten zusammenstellen.

$$\binom{10+3-1}{3} = 220$$

Es gibt

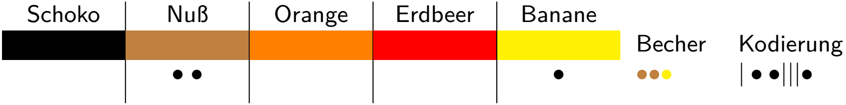
$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten $k$ Objekte aus einer Menge von $n$ Objekten ohne Beachtung ihrer Reihenfolge und mit Zurücklegen auszuwählen.

**Beispiel: Eisbecher**

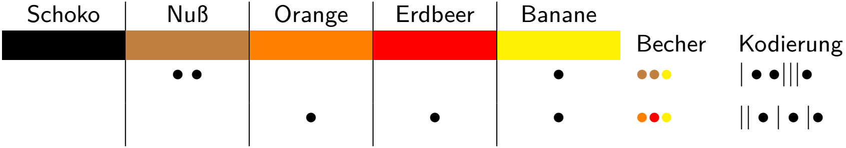
# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



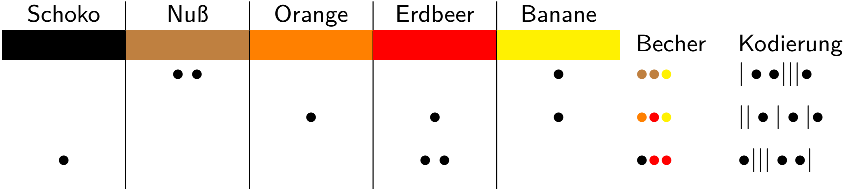
# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



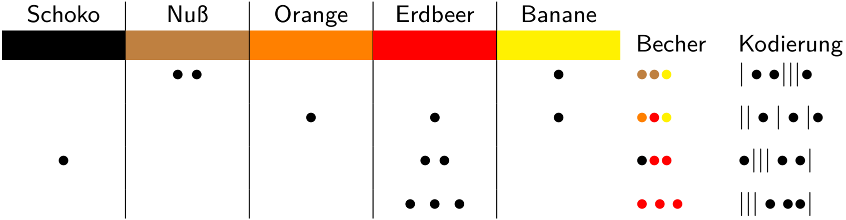
# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



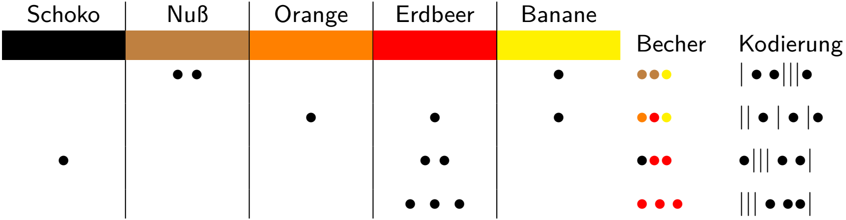
# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten



# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten

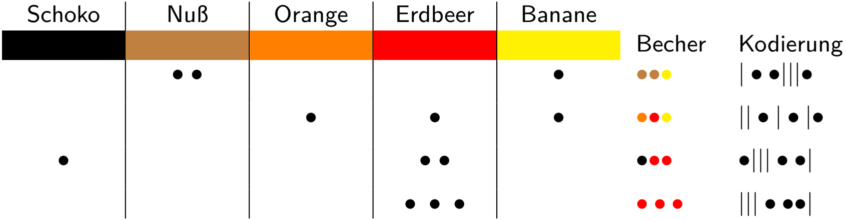



Die Kodierung der Eisbecher ist so gewählt, dass sich das Problem der Wahl von $k$ Eiskugeln aus $n$ Eissorten auf das Problem der linearen Anordnung von $k$ ununterscheidbaren Kugeln und $n-1$ ununterscheidbaren Strichen reduziert. Dieses Problem lässt sich als Auswahl von $k$ Positionen (die Kugelpositionen) aus $k+n-1$ Positionen auffassen.

Hierfür gibt es

# Herleitung: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel: gemischte Eisbecher mit 3 Kugeln aus 5 Eissorten




Die Kodierung der Eisbecher ist so gewählt, dass sich das Problem der Wahl von $k$ Eiskugeln aus $n$ Eissorten auf das Problem der linearen Anordnung von $k$ ununterscheidbaren Kugeln und $n-1$ ununterscheidbaren Strichen reduziert. Dieses Problem lässt sich als Auswahl von $k$ Positionen (die Kugelpositionen) aus $k+n-1$ Positionen auffassen.

Hierfür gibt es

$$\binom{k+n-1}{k} \text{ Möglichkeiten}$$

.

# kombinatorische Grundaufgaben:Zusammenfassung

Anzahl der $k$-Auswahlen aus einer $n$er-Menge:

| | ohne Wiederholungen | mit Wiederholungen |
|---|---|---|
| mit Beachtung der Reihenfolge | $\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $n^k$ |
| ohne Beachtung der Reihenfolge | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |

**Hinweise:**

- Bearbeiten Sie bitte das Modul Kombinatorik (Link)
- Berechnung von Binomialkoeffizienten (Link)

# Quiz-Time