

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Ordnungsrelationen

Dozentin: Wiebke Petersen

4. Foliensatz

strikte / schwache Ordnungen

Eine **Ordnung** R einer Menge A ist eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$.

Man unterscheidet zwischen **strikten** und **schwachen** Ordnungen:

Eine binäre Relation ist eine schwache Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- reflexiv und
- anti-symmetrisch

ist.

Eine binäre Relation ist eine strikte Ordnung, gdw. sie

- transitiv,
- irreflexiv und
- asymmetrisch

ist.

Strikte Ordnungen werden auch **starke** Ordnungen genannt.

korrespondierende Ordnungen

Eine schwache Ordnung $R \subseteq A \times A$ und eine strikte Ordnung S **korrespondieren** zueinander gdw.

$$R = S \cup id_A$$

Beispiele: Sei $A = \{a, b, c, d\}$

- $R_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$
- $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$
- $R_3 = \{\langle d, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$

korrespondierende strikte Ordnungen:

- $S_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $S_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$
- $S_3 = \{\langle d, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle\}$

geordnete Mengen

Eine **geordnete Menge** ist ein Paar (M, R) , bestehend aus einer Menge M und einer Ordnung R von M .

Beispiele:

- $(\mathcal{P}OT(M), \subseteq)$ ist eine schwach geordnete Menge.
 $(\mathcal{P}OT(M), \subset)$ ist die korrespondierende strikt geordnete Menge.
- (\mathbb{N}, \leq) ist eine schwach geordnete Menge.
 $(\mathbb{N}, <)$ ist die korrespondierende strikt geordnete Menge.

Terminologie

Sei (M, R) eine (strikt oder schwach) geordnete Menge.

- a ist ein **Vorgänger** von b gdw. $R(a, b)$.
- a ist ein **Nachfolger** von b gdw. $R(b, a)$.
- a ist ein **unmittelbarer Vorgänger** (oder **unterer Nachbar**) von b gdw.
 - $a \neq b$,
 - $R(a, b)$, und
 - es gibt kein $c \in M$ mit $c \notin \{a, b\}$ so dass $R(a, c)$ und $R(c, b)$.
- a ist ein **unmittelbarer Nachfolger** (oder **oberer Nachbar**) von b gdw. b ein unmittelbarer Vorgänger von a ist.

Wenn a ein unmittelbarer Vorgänger von b ist, dann schreibt man häufig $a \prec b$.

Hassediagramm

Konstruktion

Eine endliche geordnete Mengen (M, R) kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jedes Element von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daß a unterhalb von b liegt, wenn $a \neq b$ und $(a, b) \in R$.

Zwei Punkte a und b werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

Übung: Zeichnen sie die folgenden Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit
 $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle,$
 $\langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$

Hasse-Diagramm von
 $(\mathcal{P}OT(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Beispiele

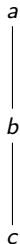
Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit

$$R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \\ \langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$$

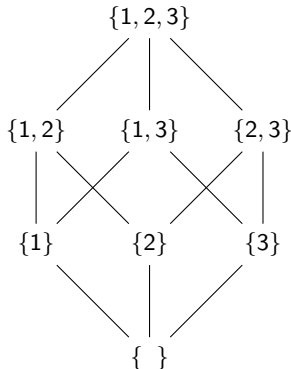
Hasse-Diagramm von
 $(\mathcal{P}OT(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Beispiele

Hasse-Diagramm von $(\{a, b, c\}, R_2)$ mit
 $R_2 = \{\langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle,$
 $\langle b, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle\}$



Hasse-Diagramm von
 $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$



Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

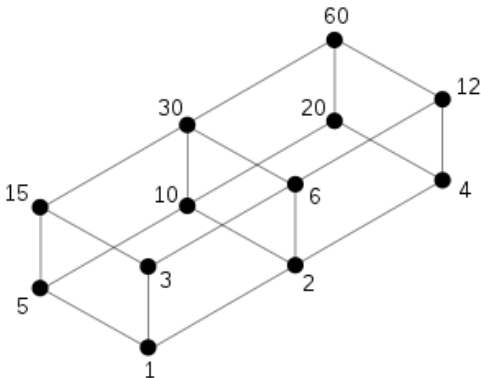
Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$, und
 $R = \{\langle x, y \rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$.

Hassediagramm der geordneten Menge (M, R) :

Hasse-Diagramme: Beispiel Teilbarkeit

Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$, und
 $R = \{\langle x, y \rangle \in M \times M \mid y \text{ ist durch } x \text{ ohne Rest teilbar}\}$.

Hasse-Diagramm der geordneten Menge (M, R) :



Übung

Zeichnen sie ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge

$M = (\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$.

totale/partielle Ordnung

Eine binäre Ordnungsrelation ist eine **totale** Ordnung, gdw. sie **konnex** ist.

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist **konnex** (bzw. **linear**) gdw. für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: $\langle x, y \rangle \in R$ oder $\langle y, x \rangle \in R$.

- Das Hassediagramm einer total geordneten, endlichen Menge bildet eine Linie. Kein Element hat mehr als einen oberen oder unteren Nachbarn.
- Totale Ordnungen werden auch **lineare** Ordnungen genannt.
- In Abgrenzung zu totalen Ordnungen werden allgemeine Ordnungen auch **partielle** Ordnungen (oder **Halbordnungen**) genannt. Im Englischen spricht man von '**poset**' (partially ordered set).

minimale und maximale Elemente

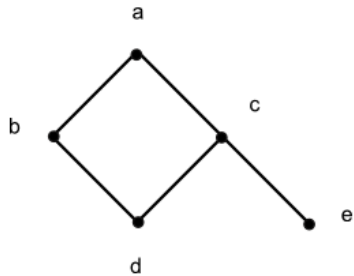
Sei $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung (strikt oder schwach).

- Ein Element $x \in A$ ist **minimal** gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Vorgänger von x ist.
- Ein Element $x \in A$ ist **maximal** gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Nachfolger von x ist.
- $x \in A$ ist das **Minimum** von A , wenn x Vorgänger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt xRy).
- $x \in A$ ist das **Maximum** von A , wenn x Nachfolger jedes anderen Elements von A ist (für alle $y \in A$ mit $x \neq y$ gilt yRx).

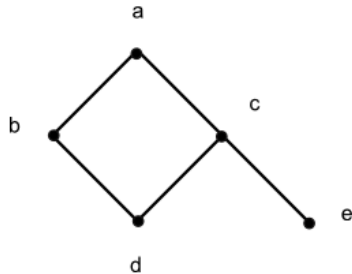
Hinweise:

- eine total geordnete Menge kann höchstens ein minimales und höchstens ein maximales Element haben.
- eine partiell geordnete Menge kann beliebig viele minimale und maximale Elemente aber höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum haben.

Beispiel



Beispiel



- a ist das einzige maximale Element und somit das Maximum der geordneten Menge.
- d und e sind die minimalen Elemente der geordneten Menge.
- die geordnete Menge hat kein Minimum,

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M . a und b heißen **vergleichbar**, falls aRb oder bRa ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge K von M heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M . a und b heißen **vergleichbar**, falls aRb oder bRa ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge K von M heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Satz von Dilworth

Für eine geordnete endliche Menge (M, R) gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von (M, R) ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von (M, R) , die man für eine Partition von M benötigt.

Vergleichbarkeit / Kette / Antikette

Sei (M, R) eine geordnete Menge und seien a und b Elemente von M . a und b heißen **vergleichbar**, falls aRb oder bRa ; sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge K von M heißt **Kette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in K$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie vergleichbar sind. Eine Teilmenge A von M heißt **Antikette**, g.d.w. für beliebige $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt, daß sie unvergleichbar sind.

Satz von Dilworth

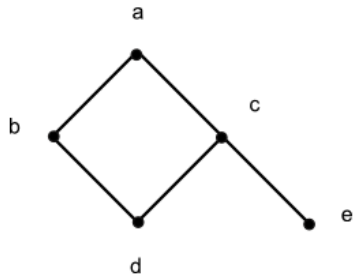
Für eine geordnete endliche Menge (M, R) gilt: Die maximale Anzahl von Elementen in einer Antikette von (M, R) ist gleich der kleinsten Anzahl von Ketten von (M, R) , die man für eine Partition von M benötigt.

Höhe / Breite

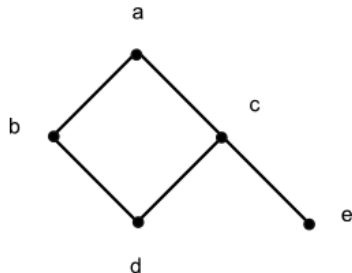
Die **Höhe** einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Kette von (M, R) .

Die **Breite** einer endlichen geordneten Menge (M, R) ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen einer Antikette von (M, R) .

Beispiel



Beispiel



- Die Elemente a und b sind vergleichbar.
- d und e sind unvergleichbar.
- $\{a, b, d\}$ ist eine Kette der geordneten Menge.
- $\{b, c\}$ ist Antikette der geordneten Menge.
- Die geordnete Menge hat die Höhe 3 und die Breite 2.
- Die Ketten $\{a, b, d\}$ und $\{c, e\}$ bilden eine minimale Partition in Ketten der geordneten Menge.

Intervall / Ideal / Filter

Sei (M, \trianglelefteq) eine geordnete Menge und $a, b \in M$ mit $a \trianglelefteq b$:

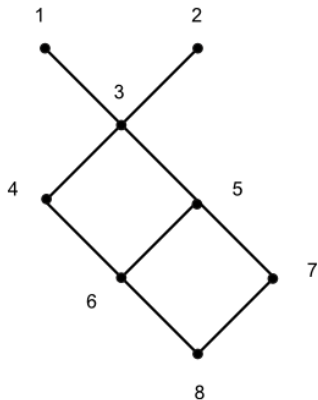
Intervall: $[a, b] := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x \trianglelefteq b \text{ oder } x = a \text{ oder } x = b\}$

Hauptideal: $(b) := \{x \in M \mid x \trianglelefteq b \text{ oder } x = b\}$

Hauptfilter: $[a) := \{x \in M \mid a \trianglelefteq x \text{ oder } x = a\}$

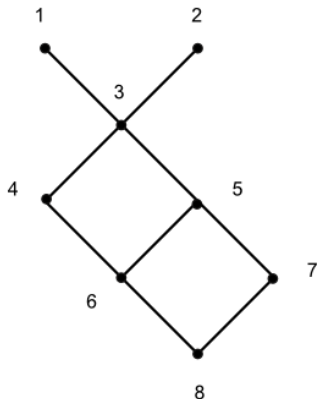
Hinweis: \trianglelefteq steht hier für eine beliebige Ordnungsrelation. Man hätte auch "Sei (M, R) eine geordnete Menge: ..." schreiben können.

Beispiel



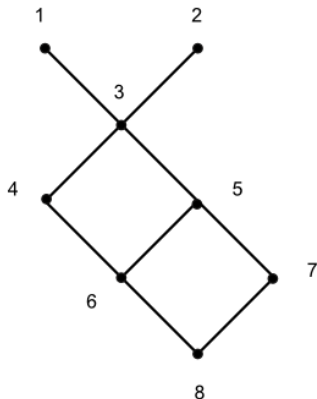
- $[6, 1] =$

Beispiel



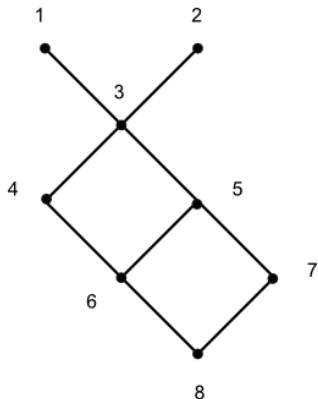
- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4) =$

Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4) = \{4, 6, 8\}$ (Hauptideal von 4)
- $(6) =$

Beispiel



- $[6, 1] = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ (Intervall von 6 bis 1)
- $(4) = \{4, 6, 8\}$ (Hauptideal von 4)
- $[6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Hauptfilter von 6).

Quasiordnung

Der Begriff der Quasiordnung ist schwächer als der der Ordnung:

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine **Quasiordnung** (oder **Präordnung**), wenn R

- reflexiv und
- transitiv ist.

Beispiel:

- Die Relation \leq_{abs} , die die ganzen Zahlen nach ihrem Betrag ordnet ist eine Quasiordnung aber keine Ordnung (beachte, dass $-3 \leq_{abs} 3$ und $3 \leq_{abs} -3$ aber $-3 \neq 3$).

Zusammenfassung: Ordnungen

schwache Ordnungen

	transitiv	reflexiv	anti-symmetrisch	linear/total
Quasiordnung	*	*		
partielle Ordnung	*	*	*	
totale Ordnung	*	*	*	*

Bemerkung: (Schwache) lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit \leq , bzw. partielle Ordnungsrelationen mit \subseteq bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

Zusammenfassung: Ordnungen

strikte Ordnungen

	transitiv	irreflexiv	asymmetrisch	linear/total
strikte partielle Ordnung	*	*	*	
strikte totale Ordnung	*	*	*	*

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit \subset bezeichnet.

Man könnte strikte Ordnungen äquivalent auch als transitive, irreflexive und antisymmetrische Relationen definieren, da eine Relation, die irreflexiv und antisymmetrisch ist, immer asymmetrisch ist.

Quiz-Time



Ordnungserhaltende Abbildungen

Definition

Seien (M, \trianglelefteq) und (M', \trianglelefteq') zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \rightarrow M'$ heißt **ordnungserhaltend**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } x \trianglelefteq y, \text{ dann } f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

Eine ordnungserhaltende Abbildung ist ein **Ordnungshomomorphismus**.

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von (\mathbb{N}_0, \leq) nach (\mathbb{N}_0, \leq) .
- $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von (\mathbb{N}_0, \leq) nach (\mathbb{N}_0, \leq) .
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^2$ ist keine ordnungserhaltende Abbildung von (\mathbb{Z}, \leq) nach (\mathbb{Z}, \leq) .
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{P}OT(M) \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $(\mathcal{P}OT(M), \subseteq)$ nach (\mathbb{N}_0, \leq) .

Terminologie und Anmerkungen

- Ordnungserhaltende Abbildungen nennt man auch **isotone** Abbildungen.
- Abbildungen für die aus $x \trianglelefteq y$ folgt, dass $f(y) \trianglelefteq' f(x)$ gilt, heißen **antiton**.
- Eine Abbildung ist **monoton**, wenn sie isoton oder antiton ist.
- **Vorsicht:** Häufig wird der Begriff 'monoton' auch nur für isotone Abbildungen verwendet.

Ordnungsreflektierende Abbildungen

Definition

Seien (M, \leq) und (M', \leq') zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \rightarrow M'$ heißt **ordnungsreflektierend**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{wenn } f(x) \leq' f(y), \text{ dann } x \leq y$$

Beispiele:

- $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2x$ ist eine ordnungsreflektierende Abbildung von (\mathbb{N}_0, \leq) nach (\mathbb{N}_0, \leq) .
- Sei M eine endliche Menge. $f : \mathcal{POT}(M) \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(A) = |A|$ ist keine ordnungsreflektierende Abbildung von $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ nach (\mathbb{N}_0, \leq) .

Satz: Ordnungsreflektierende Abbildungen sind immer injektiv.

Ordnungseinbettung

Definition

Seien (M, \trianglelefteq) und (M', \trianglelefteq') zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \rightarrow M'$ heißt **Ordnungseinbettung**, wenn sie ordnungserhaltend und ordnungsreflektierend ist, wenn also folgendes gilt:

$$x \trianglelefteq y \Leftrightarrow f(x) \trianglelefteq' f(y)$$

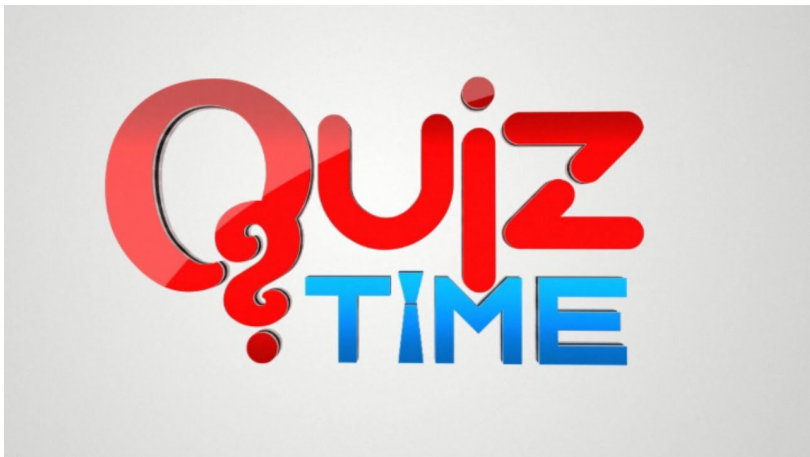
Ein **Ordnungsisomorphismus** ist eine bijektive Ordnungseinbettung. Gibt es einen Ordnungsisomorphismus zwischen (M, \trianglelefteq) und (M', \trianglelefteq') , so sagt man dass die beiden geordneten Mengen (ordnungs-)isomorph sind und schreibt $(M, \trianglelefteq) \cong (M', \trianglelefteq')$.

Ein Ordnungsisomorphismus von (M, R) in sich selbst wird auch **Ordnungsautomorphismus** genannt.

Beispiele:

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -x$ ist ein Ordnungsisomorphismus von (\mathbb{Z}, \leq) nach (\mathbb{Z}, \geq) .
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{2}$ ist ein Ordnungsautomorphismus auf (\mathbb{R}, \leq) .

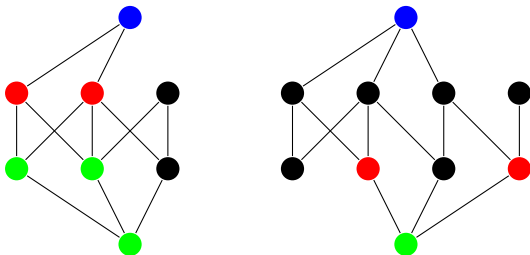
Quiz-Time



obere / untere Schranke

Sei (M, \leq) eine geordnete Menge und K eine Teilmenge von M . Ein Element x von M ist

- eine **obere Schranke** von K , g.d.w. für alle $y \in K : y \leq x$ oder $y = x$;
- eine **untere Schranke** von K , g.d.w. für alle $y \in K : x \leq y$ oder $y = x$.



Die Abbildungen zeigen die Hassediagramme zweier geordneter Mengen. Die rot markierten Elementen haben die blau markierten Elemente als obere und die grün markierten als untere Schranken.

kleinste obere / größte untere Schranke

x heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von K in M , wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese \vee als 'join').

x heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von K in M , wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese \wedge als 'meet').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

kleinste obere / größte untere Schranke

x heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von K in M , wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese \vee als 'join').

x heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von K in M , wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese \wedge als 'meet').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee \{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge \{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

Das Infimum ist also das Maximum aller unteren Schranken und das Supremum ist das Minimum aller oberen Schranken.

Beispiele

- Für die linear geordnete Menge (\mathbb{R}, \leq) gilt: $\sup[1, 4] = 4$ und $\inf[1, 4] = 1$.
- Für die partiell geordnete Menge $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ mit $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ist das Supremum von $K = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1\}\}$ die Vereinigung aller Elemente von K , also $\sup K = \{1, 2, 4\}$. Das Infimum von K ist der Durchschnitt aller Elemente von K , also $\inf K = \emptyset$.

Verbände

Verband: ordnungstheoretische Definition

Eine geordnete Menge (V, \leq) ist ein **Verband**, g.d.w. zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y und das Infimum von x und y Elemente von V sind.

vollständiger Verband

Ein Verband (V, \leq) ist ein **vollständiger Verband**, falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daß $\sup K \in V$ und $\inf K \in V$.

Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\sup V$, das **Einselement** (1_V) genannt, und ein kleinstes Element $\inf V$, das **Nullelement** (0_V) genannt.

Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die **Atome** und die unteren Nachbarn des Einselements die **Koatome** des Verbands.

Bemerkungen

- Jeder nichtleere endliche Verband ist vollständig.
- Da $\emptyset \subseteq V$ und $\inf \emptyset = 1_V$ und $\sup \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge V .

Beispiele

- $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband, \vee entspricht \cup und \wedge entspricht \cap .
- $([2, 5], \leq)$ ist ein vollständiger Verband.
- (\mathbb{R}, \leq) ist ein Verband, aber nicht vollständig.
- $(\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1\}\}, \subseteq)$ ist kein Verband.

Quiz-Time

