

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Relationen und Funktionen

Dozentin: Wiebke Petersen

2. Foliensatz

n -Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n -Tupel

Ein n -Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.

Beispiel: $\langle 2, 3, 1 \rangle$, $\langle b, e, e, s, i, i, p, l \rangle$

2-Tupel werden auch **(geordnete) Paare** genannt.

n -Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n -Tupel

Ein n -Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.

Beispiel: $\langle 2, 3, 1 \rangle$, $\langle b, e, e, s, i, i, p, l \rangle$

2-Tupel werden auch (**geordnete**) **Paare** genannt.

Cartesisches Produkt

Das **Cartesische Produkt** (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n -Tupel deren i -tes Element aus M_i stammt.

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

Statt $M \times M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n , wenn M genau n -mal auftritt.

n -Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n -Tupel

Ein n -Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.

Beispiel: $\langle 2, 3, 1 \rangle$, $\langle b, e, e, s, i, i, p, l \rangle$

2-Tupel werden auch (**geordnete**) **Paare** genannt.

Cartesisches Produkt

Das **Cartesische Produkt** (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n -Tupel deren i -tes Element aus M_i stammt.

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

Statt $M \times M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n , wenn M genau n -mal auftritt.

Beispiel

$$M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{a, d\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$M_1 \times \emptyset =$$

n -Tupel und Cartesisches Produkt

Mengen sind ungeordnet, häufig werden jedoch geordnete Listen benötigt:

n -Tupel

Ein n -Tupel ist eine Liste mit $n \geq 1$ Elementen. Im Gegensatz zu Mengen ist die Reihenfolge festgelegt und jedes Element kann beliebig oft vorkommen.

Beispiel: $\langle 2, 3, 1 \rangle$, $\langle b, e, e, s, i, i, p, l \rangle$

2-Tupel werden auch (**geordnete**) **Paare** genannt.

Cartesisches Produkt

Das **Cartesische Produkt** (oder Kreuzprodukt) von n Mengen $M_1 \dots M_n$ ist die Menge aller n -Tupel deren i -tes Element aus M_i stammt.

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

Statt $M \times M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n , wenn M genau n -mal auftritt.

Beispiel

$$M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{a, d\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$M_1 \times \emptyset = \emptyset$$

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt *n -stellige Relation*.

Eine Relation R ist also eine Menge von n -Tupeln.

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt *n -stellige Relation*.

Eine Relation R ist also eine Menge von n -Tupeln.

Hinweis: Relationen werden **extensional** definiert. Es ist unerheblich, wie die Relation charakterisiert (oder benannt) wird. Wichtig ist allein, welche Objekte zueinander in der Relation stehen.

Für Relationen werden häufig die Buchstaben R, S, T verwendet.

Relationen

Definition

Eine Teilmenge des Cartesischen Produktes von n Mengen $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt *n -stellige Relation*.

Eine Relation R ist also eine Menge von n -Tupeln.

Hinweis: Relationen werden **extensional** definiert. Es ist unerheblich, wie die Relation charakterisiert (oder benannt) wird. Wichtig ist allein, welche Objekte zueinander in der Relation stehen.

Für Relationen werden häufig die Buchstaben R, S, T verwendet.

Beispiele

- Schwester von
- Mutter von
- weibliches Elternteil von
- bilden ein Quartet
- Teilmenge von

binäre Relationen

- binäre Relationen sind Mengen geordneter Paare
- wenn a in der Relation R zu b steht, dann schreibt man
 - $\langle a, b \rangle \in R$ oder
 - aRb oder
 - $R(a, b)$ oder
 - Rab
- Wenn $R \subseteq A \times B$, dann sagt man, dass R eine Relation zwischen A und B ist.
- Wenn $R \subseteq A \times A$, dann sagt man, dass R eine Relation auf A ist.

Frage

Denken Sie sich möglichst viele binäre
Relationen aus.

1 Minute zum Nachdenken und
Diskutieren 

inverse und komplementäre Relation

inverse Relation

Die **inverse Relation** zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ ist die Relation

$$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \in B \times A \mid \langle a, b \rangle \in R\}.$$

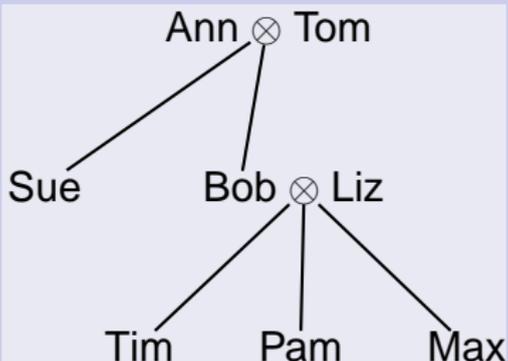
komplementäre Relation

Die **komplementäre Relation** zu einer binären Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen A und B ist die Relation

$$R' = A \times B \setminus R.$$

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie

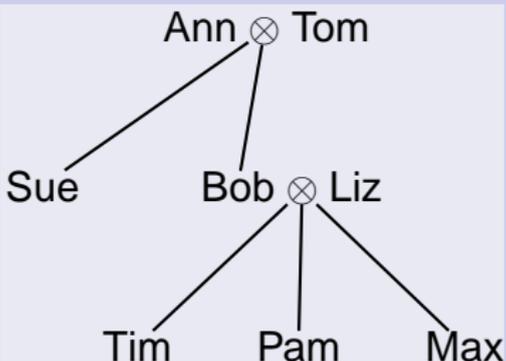


‚hat als Sohn‘

Ann	R_{son}	Bob
Tom	R_{son}	Bob
Bob	R_{son}	Max
Bob	R_{son}	Tim
Liz	R_{son}	Max
Liz	R_{son}	Tim

Beispiel: Verwandtschaftsterme

Beispielfamilie



„hat als Mutter“

Sue	R_{mother}	Ann
Bob	R_{mother}	Ann
Tim	R_{mother}	Liz
Pam	R_{mother}	Liz
Max	R_{mother}	Liz

Frage

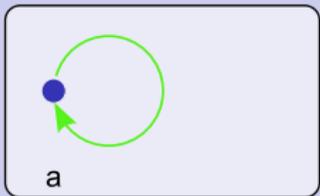
Können Sie die komplementären und die inversen Relationen Ihrer Beispielrelationen benennen?

1 Minute zum Nachdenken und Diskutieren 

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

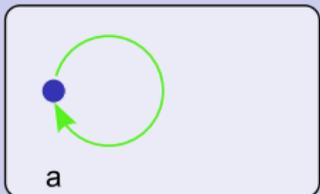
R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



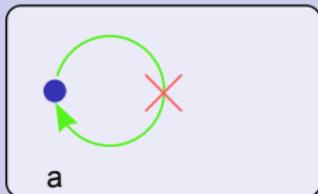
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



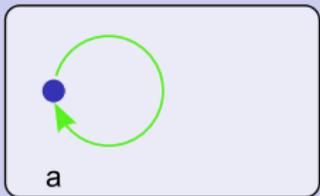
R ist **irreflexiv** g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa .



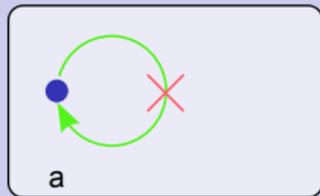
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



R ist **irreflexiv** g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa .

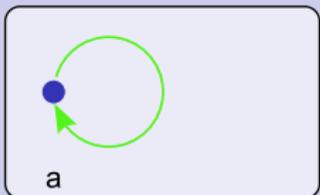


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag‘ auf der Menge der Menschen ist reflexiv.

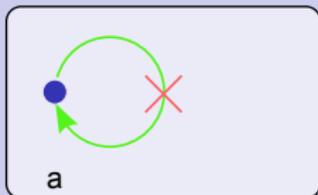
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



R ist **irreflexiv** g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa .

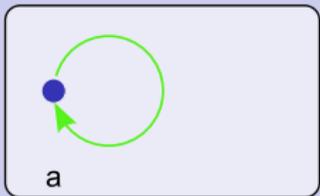


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag‘ auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von‘ auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.

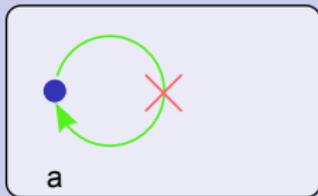
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



R ist **irreflexiv** g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa .

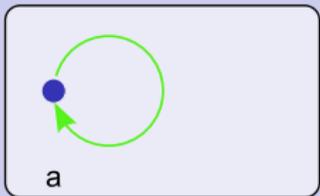


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag‘ auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von‘ auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.
- Die Relation ‚kann die Quersumme des Geburtstags von berechnen‘ auf der Menge der Menschen ist weder reflexiv noch irreflexiv.

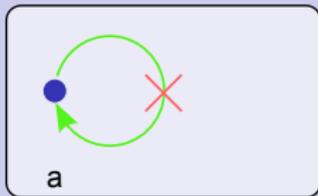
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **reflexiv** g.d.w. für alle $a \in A$ gilt, dass aRa .



R ist **irreflexiv** g.d.w. für kein $a \in A$ gilt, dass aRa .

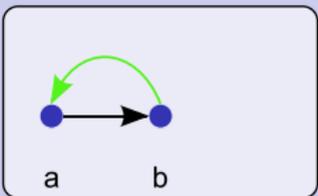


- Die Relation ‚hat am selben Tag Geburtstag‘ auf der Menge der Menschen ist reflexiv.
- Die Relation ‚ist Mutter von‘ auf der Menge der Menschen ist irreflexiv.
- Die Relation ‚kann die Quersumme des Geburtstags von berechnen‘ auf der Menge der Menschen ist weder reflexiv noch irreflexiv.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

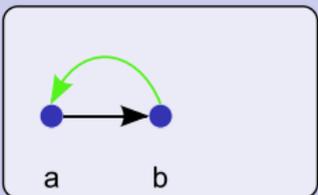
R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



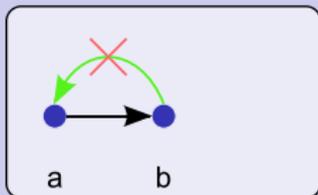
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



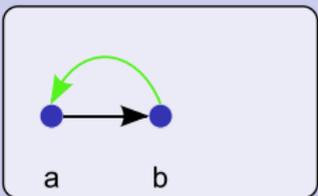
R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



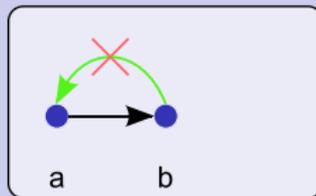
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.

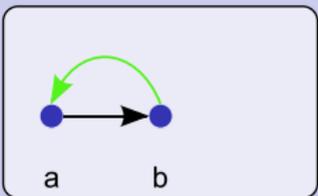


R ist **antisymmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

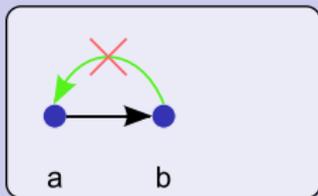
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



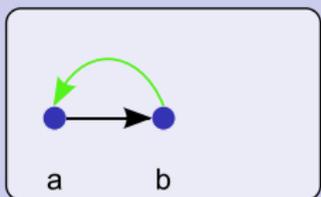
R ist **antisymmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit‘ ist symmetrisch.

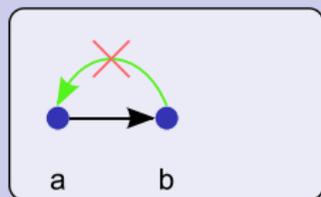
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



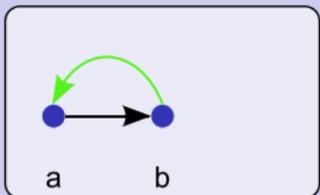
R ist **antisymmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit‘ ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als‘ ist asymmetrisch.

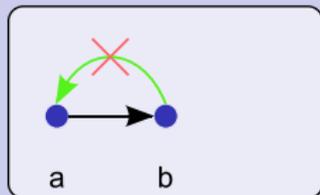
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



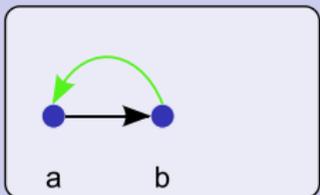
R ist **antisymmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit‘ ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als‘ ist asymmetrisch.
- Die Relation ‚ist Teilmenge von‘ ist antisymmetrisch.

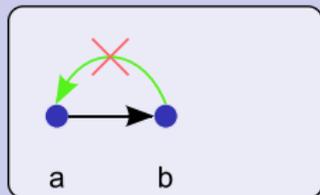
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **symmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ mit aRb auch bRa gilt.



R ist **asymmetrisch** g.d.w. für $a, b \in A$ niemals sowohl aRb als auch bRa gilt.



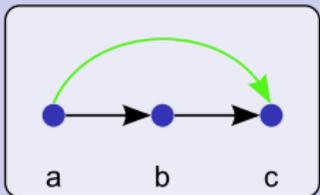
R ist **antisymmetrisch** g.d.w. für alle $a, b \in A$ aus aRb und bRa folgt, dass $a = b$.

- Die Relation ‚ist verheiratet mit‘ ist symmetrisch.
- Die Relation ‚ist größer als‘ ist asymmetrisch.
- Die Relation ‚ist Teilmenge von‘ ist antisymmetrisch.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

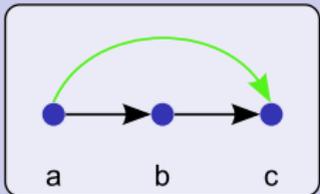
R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



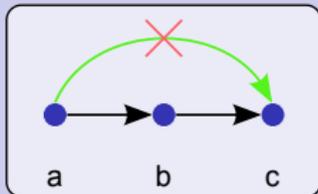
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



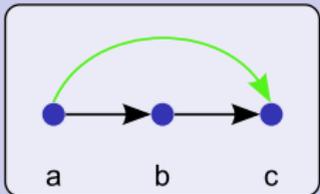
R ist **intransitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.



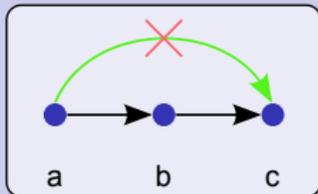
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist **intransitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

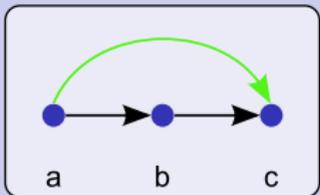


- Die Relation ‚ist Vorfahr von‘ ist transitiv.

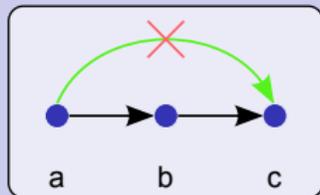
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist **intransitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

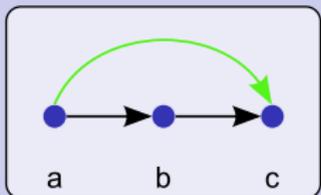


- Die Relation ‚ist Vorfahr von‘ ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als‘ ist intransitiv.

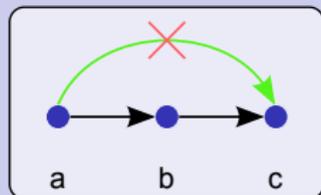
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist **intransitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.

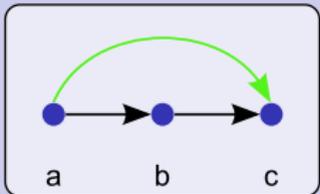


- Die Relation ‚ist Vorfahr von‘ ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als‘ ist intransitiv.
- Die Relation ‚kennt‘ ist weder transitiv noch intransitiv.

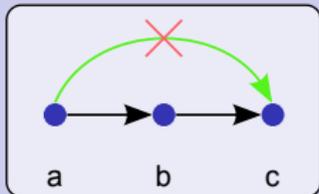
Eigenschaften binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A .

R ist **transitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc immer aRc folgt.



R ist **intransitiv** g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ mit aRb und bRc niemals aRc gilt.



- Die Relation ‚ist Vorfahr von‘ ist transitiv.
- Die Relation ‚steht genau eine Treppenstufe höher als‘ ist intransitiv.
- Die Relation ‚kennt‘ ist weder transitiv noch intransitiv.
- Welche Bedingungen erfüllen die Beispielrelationen an der Tafel?

Definitions- und Wertebereich einer Relation

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation ist, dann heißt

$$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

der **Definitionsbereich (domain)** von R .

Die Menge

$$\text{rng}(R) = \{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

heißt der **Wertebereich (range)** von R .

Definitions- und Wertebereich einer Relation

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation ist, dann heißt

$$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

der **Definitionsbereich (domain)** von R .

Die Menge

$$\text{rng}(R) = \{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a, b) \in R\}$$

heißt der **Wertebereich (range)** von R .

Beispiel:

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$\text{dom}(R) = \{b, c\}, \text{rng}(R) = \{1, 2, 3\}$$

Quiz-Time



Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine **Äquivalenzrelation** auf A , g.d.w. R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wenn R eine Äquivalenzrelation ist und aRb gilt, dann sagt man, dass a äquivalent ist zu b bezüglich R .

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Symbol \sim .

Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine **Äquivalenzrelation** auf A , g.d.w. R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wenn R eine Äquivalenzrelation ist und aRb gilt, dann sagt man, dass a äquivalent ist zu b bezüglich R .

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Symbol \sim .

Beispiele:

- Gleichheit
- ist im selben Semester wie
- hat gleich viele Elemente wie
- hat die selbe Farbe wie
- Welche der Beispielrelationen an der Tafel sind Äquivalenzrelationen?

Äquivalenzrelation

Äquivalenzklasse

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A . Die Äquivalenzklasse eines Elements $a \in A$ ist die Menge aller zu a äquivalenten Elemente von A , also

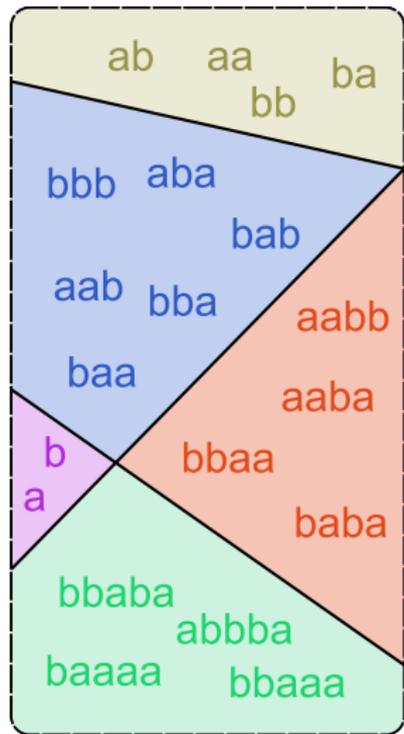
$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Die Menge

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus A bezüglich R heißt **Quotient** von A bezüglich R .

Hinweis: Äquivalenzklassen können per Definition nicht leer sein.



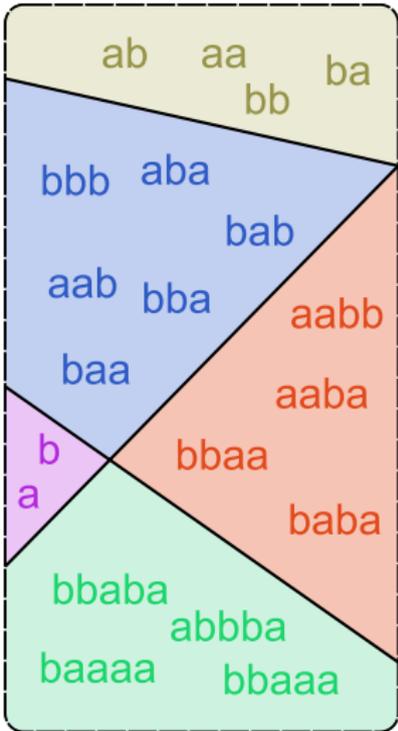
Äquivalenzrelation

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A . Dann gilt:

- Zwei Äquivalenzklassen von R sind entweder disjunkt oder identisch: für alle $a, b \in A$ gilt entweder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ oder $[a]_R = [b]_R$.
- Die Äquivalenzklassen von R decken ganz A ab: $\bigcup A/R = A$.

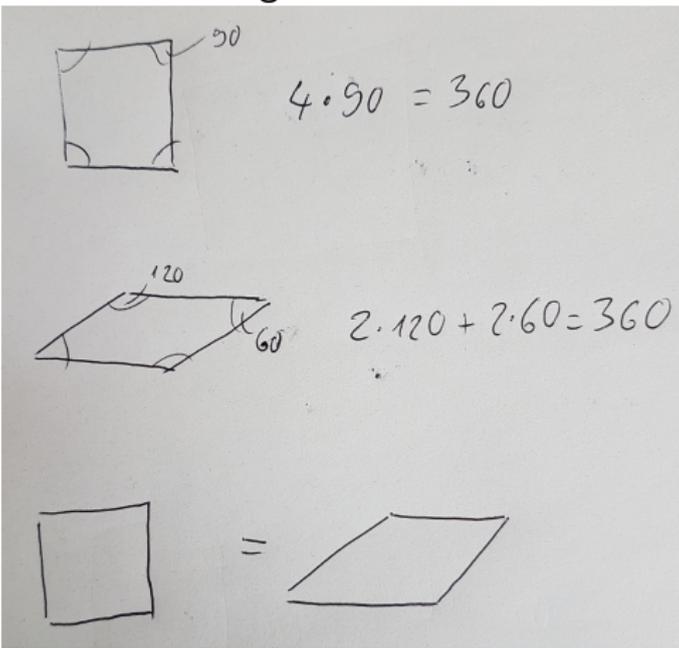
Eine Menge $P \subseteq \mathcal{P}OT(A)$ ist eine **Partition** (oder disjunkte Zerlegung) von A , g.d.w. $\bigcup P = A$ und für alle $X, Y \in P$ mit $X \neq Y$ gilt $X \cap Y = \emptyset$.

Folglich bildet der Quotient einer Äquivalenzrelation eine Partition der Grundmenge.



Äquivalenzrelation

Was geschieht hier?



Quiz-Time



Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*), wenn sie *jedem* Element aus D *genau ein* Element aus W zuordnet.

Funktionen müssen also die Bedingungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

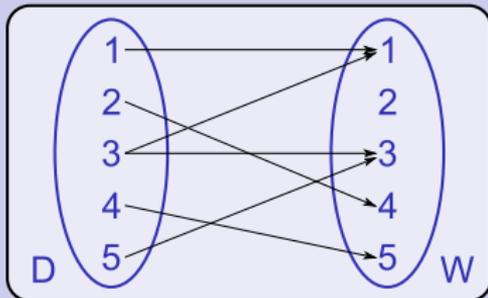
Funktionen

Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine **Funktion** (oder **Abbildung**), wenn sie **jedem** Element aus D **genau ein** Element aus W zuordnet.

Funktionen müssen also die Bedingungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y \rangle \in R$.



Funktionen

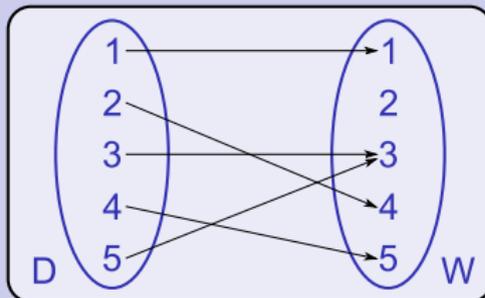
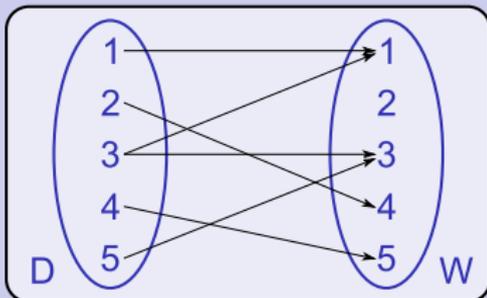
Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine **Funktion** (oder **Abbildung**), wenn sie **jedem** Element aus D **genau ein** Element aus W zuordnet.

Funktionen müssen also die Bedingungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y \rangle \in R$.

Eindeutigkeit: Wenn $\langle x, y \rangle \in R$ und $\langle x, z \rangle \in R$, dann $y = z$.



Funktionen

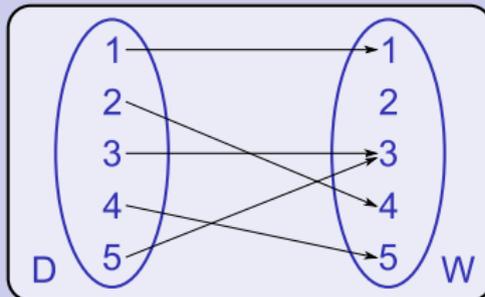
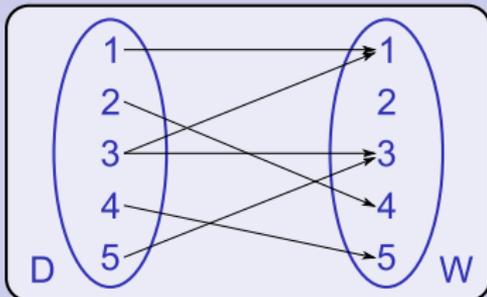
Definition

Eine Relation $R \subseteq D \times W$ ist eine **Funktion** (oder **Abbildung**), wenn sie **jedem** Element aus D **genau ein** Element aus W zuordnet.

Funktionen müssen also die Bedingungen der Existenz und Eindeutigkeit erfüllen:

Existenz: Für **jedes** $x \in D$ gibt es ein $y \in W$ mit $\langle x, y \rangle \in R$.

Eindeutigkeit: Wenn $\langle x, y \rangle \in R$ und $\langle x, z \rangle \in R$, dann $y = z$.



Eine Relation, für die die Eindeutigkeitsbedingung (aber nicht unbedingt die Existenzbedingung) gilt, heißt **partielle Funktion**.

Notation und Terminologie

- Für Funktionen verwendet man häufig die Buchstaben f, g, h, F, G, H .
- Wenn $f \subseteq A \times B$ eine Funktion ist, dann sagt man, dass f eine Funktion von A nach B ist, und schreibt $f : A \rightarrow B$. A wird dann der **Definitionsbereich** und B der **Wertebereich** von f genannt.
- Wenn $\langle a, b \rangle \in f$, dann sagt man, dass die Funktion f dem Element a den Wert b zuweist, und schreibt $f(a) = b$ oder $f : a \mapsto b$.
- Elemente des Definitionsbereiches heißen **Argumente** und Elemente des Wertebereiches heißen **Werte** einer Funktion.
- Wenn $C \subset A$ und $f : A \rightarrow B$, dann bezeichnet $f|_C : C \rightarrow B$ die **Einschränkung** der Funktion f auf C . Für alle $c \in C$ gilt $f|_C(c) = f(c)$.
- Im Kontext von partiellen Funktionen werden Funktionen, die die Existenzbedingung erfüllen, häufig **totale Funktionen** genannt.

Beispiele

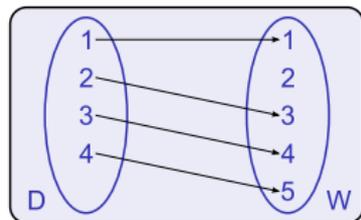
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ ist keine partielle Funktion.
- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine partielle aber keine totale Funktion.
- Die Relation $R \subseteq A \times B$ mit $R = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 1)\}$ ist eine totale und folglich auch eine partielle Funktion.

Funktionseigenschaften

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion.

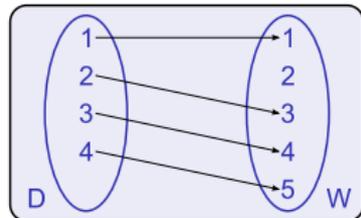
f ist **injektiv** (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
 $f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



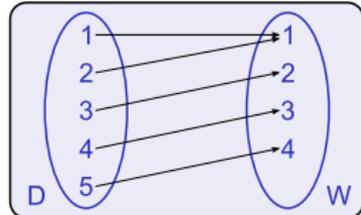
Funktionseigenschaften

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion.

f ist **injektiv** (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
 $f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



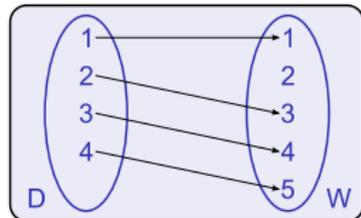
f ist **surjektiv** (Engl.: onto), wenn jedes Element von W mindestens einem Element von D als Wert zugewiesen wird. Wenn es also für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt.



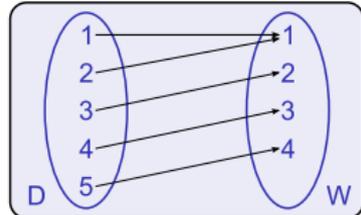
Funktionseigenschaften

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion.

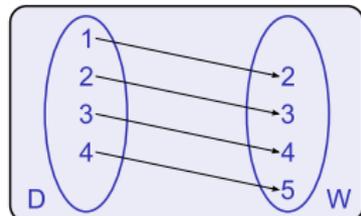
f ist **injektiv** (Engl.: one-to-one), wenn keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereiches denselben Wert zugewiesen bekommen. Wenn also für alle $x, y \in D$ gilt:
 $f(x) = f(y)$ g.d.w. $x = y$.



f ist **surjektiv** (Engl.: onto), wenn jedes Element von W mindestens einem Element von D als Wert zugewiesen wird. Wenn es also für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt.



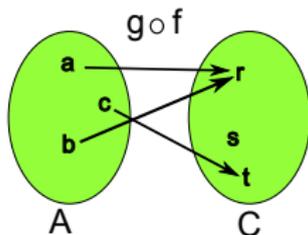
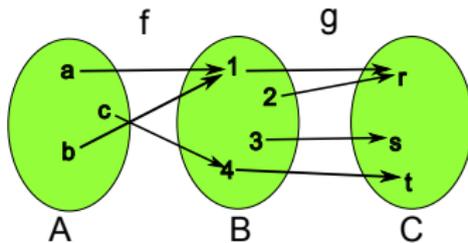
f ist **bijektiv**, wenn f *injektiv* **und** *surjektiv* ist.
Merke: Eine Funktion f ist bijektiv, g.d.w. f^{-1} eine Funktion ist.



Komposition von Funktionen

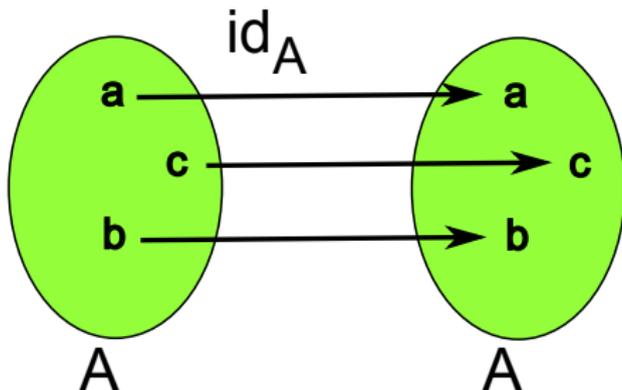
Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Funktionen. Die Funktion $g \circ f : A \rightarrow C$ mit $g \circ f = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{es gibt ein } y \in B \text{ mit } (x, y) \in f \text{ und } (y, z) \in g\}$ ist die **Komposition** (oder **Verkettung**) von f und g .

Es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Die Funktion $g \circ f$ weist einem Element $x \in A$ das Element aus C zu, das man erhält, wenn man zunächst f auf x anwendet und auf das Ergebnis noch g anwendet.



Identitätsfunktion

Die Funktion $id_A : A \rightarrow A$ mit $f = \{(a, a) \in A \times A\}$ (oder $f(a) = a$ für alle $a \in A$) heißt die **Identität(sfunktion)** auf A .



mehrstellige Funktionen

- Der Definitionsbereich einer Funktion kann selbst eine Relation sein.
- Eine Funktion $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ heißt n -stellige Funktion.
- Beispiel: Die Addition der natürlichen Zahlen $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ kann als zweistellige Funktion aufgefasst werden.
- Zweistellige Operationen bilden zweistellige Funktionen (Bsp.: Schnitt, Vereinigung, ...).
- n -stellige Funktionen sind $n + 1$ -stellige Relationen (Bsp: Mutter)

Charakteristische Funktion einer Teilmenge

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ lässt sich mithilfe ihrer **charakteristischen Funktion** beschreiben.

Die charakteristische Funktion einer Teilmenge $N \subseteq M$ ist die Funktion $\chi : M \rightarrow \{0, 1\}$, für die gilt: $\chi(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in N$.

Für die charakteristische Funktion von $N \subseteq M$ schreibt man häufig auch χ_N .

Es gilt:

$$\chi_N : M \rightarrow \{0, 1\}; \quad \chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mengen von Funktionen

Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Funktionen von N nach M .
Also:

$$M^N = \{f : N \rightarrow M \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

Charakteristische Funktion und Potenzmenge

Wir haben gesehen, dass man für die Potenzmenge einer Menge M auch 2^M schreiben kann. Warum?

Charakteristische Funktion und Potenzmenge

Wir haben gesehen, dass man für die Potenzmenge einer Menge M auch 2^M schreiben kann. Warum?

In 2^M steht 2 für die 2-elementige Menge $\{0, 1\}$.

Die Potenzmenge einer Menge M lässt sich als Menge aller charakteristischen Funktionen ihrer Teilmengen auffassen:

$$\mathcal{POT}(M) = 2^M = \{f : M \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$$

1	2	3	...	n
0	0	0	...	0
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
⋮				⋮
0	0	0	...	1
1	1	0	...	0
1	0	1	...	0
⋮				⋮
1	1	1	...	1

Quiz-Time

