Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Beweisverfahren

Dozentin: Wiebke Petersen

11. Foliensatz

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.
- Wegen der Transitivität der Ordnungsrelation $>$ folgt aus $n > 7$ und $7 > 5$, dass $n > 5$.

direkter / konstruktiver Beweis

Die Aussage wird durch die Überführung der Prämisse in die Konklusion (oder der linken Gleichungsseite in die rechte) mithilfe erlaubter Transformationen bzw. logischer Schlüsse bewiesen.

Satz

Wenn eine Zahl größer als 7 ist, dann ist sie auch größer als 5.

- Sei n eine beliebige Zahl größer 7 ($n > 7$).
- Es gilt außerdem $7 > 5$.
- Wegen der Transitivität der Ordnungsrelation $>$ folgt aus $n > 7$ und $7 > 5$, dass $n > 5$.
- Somit folgt, dass jede Zahl, die größer als 7 ist auch größer als 5 ist.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathcal{POT}(M)| = \left|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\right|$.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathcal{POT}(M)| = \big|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\big|$.
- $\big|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\big|$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit 2 Elementen n-mal mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ein Element zu ziehen.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Für eine endliche Menge M gilt: Wenn $|M| = n$, dann $|\mathcal{POT}(M)| = 2^n$

- Man zeigt: $|\mathcal{POT}(M)| = \big|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\big|$.
- $\big|\{w \in \{0,1\}^* : |w| = n\}\big|$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit 2 Elementen n-mal mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge ein Element zu ziehen.
- Hierfür ist die Anzahl bekannt, nämlich 2^n.

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$*. Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

- Wenn man nun die Spalten zusammenrechnet, so erhält man für jede Spalte $n+1$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

direkter / konstruktiver Beweis

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Man schreibe die n-Zahlen zweimal nebeneinander auf und zwar einmal in aufsteigender und darunter in absteigender Reihenfolge:

1	2	...	n-1	n
n	n-1	...	2	1

- Wenn man nun die Spalten zusammenrechnet, so erhält man für jede Spalte $n+1$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

- Die Werte in der letzten Zeile zusammengezählt ergeben $n\cdot(n+1)$. Da in der letzten Zeile spaltenweise die beiden oberen Zeilen addiert worden sind, gilt:

$$2\cdot\sum_{i=1}^{i=n} i = n\cdot(n+1) \text{ folglich gilt: } \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- Um eine Schlussfolgerung zu beweisen, wird gezeigt, dass aus der Falschheit der Folgerung die Falschheit der Voraussetzung folgt

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- Um eine Schlussfolgerung zu beweisen, wird gezeigt, dass aus der Falschheit der Folgerung die Falschheit der Voraussetzung folgt

Satz

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- Um eine Schlussfolgerung zu beweisen, wird gezeigt, dass aus der Falschheit der Folgerung die Falschheit der Voraussetzung folgt

Satz

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.

- Angenommen, n ist ungerade, also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2k + 1$

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- Um eine Schlussfolgerung zu beweisen, wird gezeigt, dass aus der Falschheit der Folgerung die Falschheit der Voraussetzung folgt

Satz

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.

- Angenommen, n ist ungerade, also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2k + 1$
- Dann ist $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Beweis durch Kontraposition

- Logisches Prinzip: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- Um eine Schlussfolgerung zu beweisen, wird gezeigt, dass aus der Falschheit der Folgerung die Falschheit der Voraussetzung folgt

Satz

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.

- Angenommen, n ist ungerade, also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2k + 1$
- Dann ist $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
- Da $4k^2$ und $4k$ gerade Zahlen sind, ist $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ungerade.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Spezialfall der Kontraposition: $(\top \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \bot)$

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Spezialfall der Kontraposition: $(\top \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \bot)$
Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt und zeigen, dass diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt, also zu einer Aussage, die zugleich wahr und falsch sein muss.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist

$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

  ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist
$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$
ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.
- Zusätzlich muss aber auch $p > p_n$ gelten, woraus folgt, dass p keine Primzahl ist, da p größer als die größte Primzahl ist.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und p_n wäre die größte aller Primzahlen.
- Dann ist
$$p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$
ebenfalls eine Primzahl, da p bei der Division durch jede der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ den Rest 1 ergibt und somit p durch keine dieser Primzahlen teilbar ist.
- Zusätzlich muss aber auch $p > p_n$ gelten, woraus folgt, dass p keine Primzahl ist, da p größer als die größte Primzahl ist.
- Dies führt zu einem Widerspruch, da die Aussagen "p ist eine Primzahl" und "p ist keine Primzahl" nicht beide zugleich wahr sein können.

indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Satz

Die Potenzmenge $\mathcal{POT}(M)$ einer (abzählbaren) Menge M ist immer mächtiger als die Menge selbst.

1. $\mathcal{POT}(M)$ ist mindestens so mächtig wie M, da die Menge der Einermengen $\{\{m\} : m \in M\}$ genauso mächtig ist wie M und eine echte Teilmenge von $\mathcal{POT}(M)$ ist.
2. Über das (generalisierte) Diagonalverfahren zeigt man, dass die Annahme, $\mathcal{POT}(M)$ und M seien gleichmächtig, zu einem Widerspruch führt.
3. Aus 1 und 2 folgt, daß $\mathcal{POT}(M)$ mächtiger als M sein muss.

Beweis durch Gegenbeispiel

Um die Falschheit einer Aussage zu zeigen, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben.

Satz

Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist nicht notwendig leer.

Wir zeigen dass die Aussage: "Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist immer leer" falsch ist.
Gegenbeispiel: Wenn $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1\}$, dann $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$.

Ringschluss

Seien $p_1, ..., p_n$ Aussagen, deren Äquivalenz zu beweisen ist.
Dann genügt es zu zeigen, dass für $k < n$ gilt $p_k \rightarrow p_{k+1}$ und $p_n \rightarrow p_1$

Ringschluss

Seien $p_1, ..., p_n$ Aussagen, deren Äquivalenz zu beweisen ist.
Dann genügt es zu zeigen, dass für $k < n$ gilt $p_k \rightarrow p_{k+1}$ und $p_n \rightarrow p_1$
Das Verfahren basiert auf der Transitivität der logischen Schlussfolgerung $(((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ringschluss

Seien $p_1, ..., p_n$ Aussagen, deren Äquivalenz zu beweisen ist.
Dann genügt es zu zeigen, dass für $k < n$ gilt $p_k \rightarrow p_{k+1}$ und $p_n \rightarrow p_1$
Das Verfahren basiert auf der Transitivität der logischen Schlussfolgerung $(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

$$\begin{tikzcd}
 & p_1 \arrow[dr] & \\
p_3 \arrow[ur] & & p_2 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Ringschluss

Satz

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *sind äquivalent:*

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. *Für jeden anderen Vektor* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *ist* $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$
3. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$

Ringschluss

Satz

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *sind äquivalent:*

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. *Für jeden anderen Vektor* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *ist* $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$
3. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$

- $1 \rightarrow 2$: Nach Annahme ist $x_1 = x_2 = 0$, also $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 + 0 = 0$

Ringschluss

Satz

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *sind äquivalent:*

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. *Für jeden anderen Vektor* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *ist* $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$
3. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$

- $1 \to 2$: Nach Annahme ist $x_1 = x_2 = 0$, also $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 + 0 = 0$
- $2 \to 3$: Mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ folgt aus 2, dass
  $0 = \sqrt{0} = \sqrt{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Ringschluss

Satz

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *sind äquivalent:*

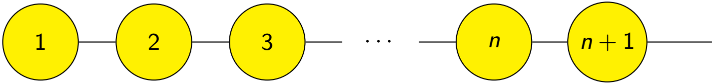
1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. *Für jeden anderen Vektor* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *ist* $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$
3. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$

- $1 \rightarrow 2$: Nach Annahme ist $x_1 = x_2 = 0$, also $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 + 0 = 0$
- $2 \rightarrow 3$: Mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ folgt aus 2, dass
  $0 = \sqrt{0} = \sqrt{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $3 \rightarrow 1$: Nach Annahme ist $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Da $x_1^2 \geq 0$ und $x_2^2 \geq 0$, muss $x_1^2 = x_2^2 = 0$, also $x_1 = x_2 = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion

In einem vollständigen Induktionsbeweis macht man sich eine besondere Eigenschaft der Menge der natürlichen Zahlen zunutze: Ausgehend von der Zahl 1 kann jede natürliche Zahl durch wiederholtes Anwenden der Nachfolgefunktion ($f(n) = n + 1$) erreicht werden.

- Man zeigt zunächst, dass die zu beweisende Aussage für $n = 1$ gilt.
- Dann zeigt man, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n + 1$.
- Wenn die Aussage für $n = 1$ gilt und wenn außerdem aus der Gültigkeit der Aussage für n auch die Gültigkeit der Aussage für $n + 1$ folgt, so folgt, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1. Da $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. *Es gilt also:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen ist $S(n)+(n+1)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} S(n)+(n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $S(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dann folgt aus der Annahme $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen ist $S(n)+(n+1)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} S(n)+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für $(n+1)$ immer dann, wenn sie für n gilt. Da sie für $n=1$ gilt, folgt aus der Definition der natürlichen Zahlen und dem Induktionsschluss, dass sie für alle natürlichen Zahlen gelten muss.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n + 1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n + 1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n + 1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n) = n^2$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n+1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n) = n^2$.
Die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen ist $U(n) + (2(n+1) - 1)$, da $2(n+1) - 1$ die $(n+1)$-te ungerade Zahl ist. Es folgt:

$$U(n)+(2(n+1)-1) = n^2+2(n+1)-1 = n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen 1. Da $1^2 = 1$ gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, gilt sie auch für $n + 1$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges n.
Sei $U(n)$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, dann folgt aus der Annahme $U(n) = n^2$.
Die Summe der ersten $n + 1$ ungeraden Zahlen ist $U(n) + (2(n + 1) - 1)$, da $2(n + 1) - 1$ die $(n + 1)$-te ungerade Zahl ist. Es folgt:

$$U(n)+(2(n+1)-1) = n^2+2(n+1)-1 = n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Also gilt die Aussage für $(n + 1)$ immer dann, wenn sie für n gilt. Da sie für $n = 1$ gilt, folgt aus der Definition der natürlichen Zahlen und dem Induktionsschluss, dass sie für alle natürlichen Zahlen gelten muss.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k + 1$, solange $k + 1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k + 1 \leq n$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k + 1$, solange $k + 1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k + 1 \leq n$.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.
Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n-k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k + 1$, solange $k + 1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k + 1 \leq n$.

Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n - k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.

Allerdings kann jede der neuen, vergrößerten Teilmengen mit $k + 1$ Elementen insgesamt auf $k + 1$ Arten aus einer k-elementigen Teilmenge durch Hinzunahme eines weiteren Elements entstanden sein.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden, wenn $n \geq k$ gilt.

Sei n beliebig. Induktion über k:

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für $k = 0$: Es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen nämlich die leere Menge. Ferner gilt $\binom{n}{0} = 1$ für beliebiges n.

Induktionsschluss. Wir zeigen, dass immer wenn die Aussage für ein beliebiges k gilt, gilt sie auch für $k+1$, solange $k+1 \leq n$: Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges k mit $k+1 \leq n$.
Jede der k-elementigen Teilmengen muss um ein Element vergrößert werden. Für jede dieser Mengen gibt es $n-k$ Elemente der Grundmenge, die noch nicht Element der Menge sind und daher zur Vergrößerung hinzugenommen werden können.
Allerdings kann jede der neuen, vergrößerten Teilmengen mit $k+1$ Elementen insgesamt auf $k+1$ Arten aus einer k-elementigen Teilmenge durch Hinzunahme eines weiteren Elements entstanden sein.

Es gibt also $\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$ k-elementige Teilmengen zu einer beliebigen n-elementigen Menge.

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)! \cdot (k+1)} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} =$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktiosschluss. Sei M eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Nimmt man ein Pferd p aus M heraus, besitzen die n Pferde in $M \setminus \{p\}$ nach Induktionssannahme die gleiche Färbung F.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktiosschluss. Sei M eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Nimmt man ein Pferd p aus M heraus, besitzen die n Pferde in $M \setminus \{p\}$ nach Induktionssannahme die gleiche Färbung F.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktiosschluss. Sei M eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Nimmt man ein Pferd p aus M heraus, besitzen die n Pferde in $M \setminus \{p\}$ nach Induktionssannahme die gleiche Färbung F. Nimmt man ein weiteres Pferd $q \neq p$ aus $M \setminus \{p\}$ heraus, haben die $n - 1$ Pferde in $M \setminus \{p, q\}$ die Färbung F. Nimmt man p wieder hinzu, haben die n Pferde in $M \setminus \{q\}$ die Färbung F, insbesondere hat auch p die Färbung F. Damit haben alle Pferde in M die Färbung F, also die gleiche Färbung.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktiosschluss. Sei M eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Nimmt man ein Pferd p aus M heraus, besitzen die n Pferde in $M \setminus \{p\}$ nach Induktionssannahme die gleiche Färbung F. Nimmt man ein weiteres Pferd $q \neq p$ aus $M \setminus \{p\}$ heraus, haben die $n - 1$ Pferde in $M \setminus \{p, q\}$ die Färbung F. Nimmt man p wieder hinzu, haben die n Pferde in $M \setminus \{q\}$ die Färbung F, insbesondere hat auch p die Färbung F. Damit haben alle Pferde in M die Färbung F, also die gleiche Färbung.

Was ist schiefgelaufen?

Beweis durch vollständige Induktion

Satz

In einer Herde mit n Pferden besitzen alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktionsanfang. In einer Herde mit $n = 1$ Pferden haben alle Pferde die gleiche Färbung.

Induktiosschluss. Sei M eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Nimmt man ein Pferd p aus M heraus, besitzen die n Pferde in $M \setminus \{p\}$ nach Induktionssannahme die gleiche Färbung F. Nimmt man ein weiteres Pferd $q \neq p$ aus $M \setminus \{p\}$ heraus, haben die $n - 1$ Pferde in $M \setminus \{p, q\}$ die Färbung F. Nimmt man p wieder hinzu, haben die n Pferde in $M \setminus \{q\}$ die Färbung F, insbesondere hat auch p die Färbung F. Damit haben alle Pferde in M die Färbung F, also die gleiche Färbung.

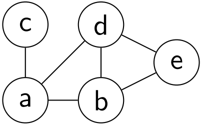
Was ist schiefgelaufen?Betrachte den Fall $n = 2$

Eulerscher Polyedersatz

Theorem

Sei G die planare Zeichnung eines zusammenhängenden, planaren Graphen mit E Ecken, K Kanten, der die Fläche in F Gebiete unterteilt. Dann gilt

$$E - K + F = 2.$$



E=5, K=6, F=3

E-K+F=5-6+3=2

Beweis durch strukturelle Induktion / Eulerscher Polyedersatz

Der *einfachste* zusammenhängende, planare Graph besteht aus nur einer Ecke. Es gibt eine Fläche (die Außenfläche) und keine Kanten.
Es gilt also: $E - K + F = 1 - 0 + 1 = 2$.
In Worten: Knotenzahl - Kantenzahl + Gebietszahl = 2.

Abbildung: Der *einfachste* Graph

Aus diesem *einfachsten* Graphen können alle weiteren ausschließlich durch die beiden folgenden Operationen konstruiert werden (dabei bleibt die Gültigkeit des Satzes erhalten):

Eulerscher Polyedersatz

1. *Hinzufügen einer Ecke*, die über eine neue Kante mit dem Rest des Graphen verbunden ist. Die Anzahl der Ecken und Kanten steigt jeweils um eins, während die Anzahl der Flächen gleichbleibt. Galt für den alten Graphen $E - K + F = 2$, so gilt es auch für den neuen, da auf der linken Seite der Gleichung je eine Eins addiert und abgezogen wurde.

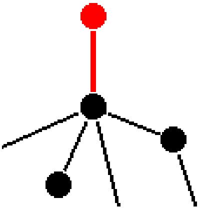


Abbildung: *Hinzufügen einer Ecke*

Eulerscher Polyedersatz

2. *Hinzufügen einer Kante*, die zwei bereits bestehende Ecken verbindet. Während die Anzahl der Ecken gleichbleibt, steigt die Anzahl der Flächen und Kanten jeweils um eins. Wieder bleibt die Summe $E - K + F$ gleich, da je eine Eins addiert und abgezogen wurde.

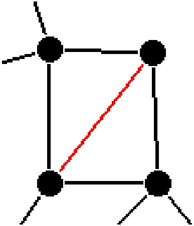


Abbildung: *Hinzufügen einer Kante*

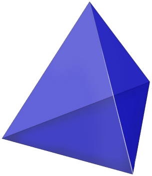
Eulerscher Polyedersatz

Da der Satz für den ersten, einfachsten Graphen galt, muss er also auch für jeden Graphen gelten, der durch eine der beiden Operationen aus diesem entsteht. Jeder Graph, der durch eine weitere Operation aus einem solchen Graphen entsteht, muss den Satz ebenfalls erfüllen usw.

Daher gilt der Satz für alle zusammenhängenden, planaren Graphen und damit auch für alle konvexen Polyeder.

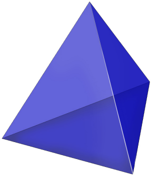
Der Beweis stammt von Cauchy. Er war der Erste, der das Problem der konvexen Polyeder auf ein Problem der Graphentheorie reduzierte.

Eulerscher Polyedersatz



Polyeder Ein Polyeder ist eine Teilmenge des 3-dimensionalen Raums, welche nur von ebenen Flächen begrenzt wird.

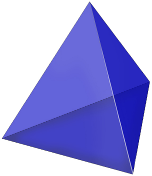
Eulerscher Polyedersatz



Polyeder Ein Polyeder ist eine Teilmenge des 3-dimensionalen Raums, welche nur von ebenen Flächen begrenzt wird.

konvexe Polyeder Ein Polyeder ist konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Polyeders zu dem Polyeder gehören.

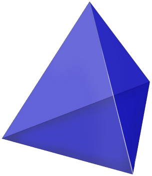
Eulerscher Polyedersatz



Polyeder Ein Polyeder ist eine Teilmenge des 3-dimensionalen Raums, welche nur von ebenen Flächen begrenzt wird.

konvexe Polyeder Ein Polyeder ist konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Polyeders zu dem Polyeder gehören.

Eulerscher Polyedersatz



Polyeder Ein Polyeder ist eine Teilmenge des 3-dimensionalen Raums, welche nur von ebenen Flächen begrenzt wird.

konvexe Polyeder Ein Polyeder ist konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Polyeders zu dem Polyeder gehören.

Theorem

Eulerscher Polyedersatz Für ein beschränktes konvexes Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen gilt:

$$E - K + F = 2$$