Seminar: Formale Begriffsanalyse
Bestimmung aller Begriffe eines formalen Kontextes

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de
http://user.phil-fak.uni-duesseldorf.de/~petersen/Form_Begr/Form_Begr.html

30. Mai 2006

Hüllensysteme und Hüllenoperatoren

Definition 1. *Ein **Hüllensystem** auf einer Menge G ist eine Menge von Teilmengen, die G enthält und gegen Durchschnitt abgeschlossen ist. Formal: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(G)$ ist ein Hüllensystem, falls $G \in \mathcal{A}$ ist und*

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{A}$$

gilt.

*Ein Hüllenoperator ϕ auf G ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge $X \subseteq G$ eine **Hülle** $\phi X \subseteq G$ zuordnet, wobei gilt:*

1. $X \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad \phi X \subseteq \phi Y$ *(Monotonie)*
2. $X \subseteq \phi X$ *(Extensität)*
3. $\phi\phi X = \phi X$ *(Idempotenz)*

Proposition 2. *Ist $\mathcal{A}$ ein Hüllensystem auf G, so definiert*

$$\phi_{\mathcal{A}} X := \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\}$$

einen Hüllenoperator auf G. Umgekehrt ist die Menge

$$\mathcal{A}_{\phi} := \{\phi X \mid X \subseteq G\}$$

aller Hüllen eines Hüllenoperators ϕ stets ein Hüllensystem.

Bestimmung aller Begriffe eines Kontextes: Algorithmus zur Erzeugung aller Hüllen eines gegebenen Hüllenoperators

- Zur Bestimmung aller Begriffe genügt es alle Begriffsumfänge zu bestimmen (analog: alle Begriffsinhalte).
- $A \mapsto A''$ ist ein Hüllenoperator auf G.
- Zur Bestimmung aller Begriffe eines Kontextes müssen also alle Hüllen des Hüllenoperators $A \mapsto A''$ bestimmt werden.
- Idee:
  1. definiere eine strikte lineare Ordnung auf der Potenzmenge der Gegenstandsmenge
  2. finde eine Methode um zu einer gegebenen Menge $A \subseteq G$ den bezüglich der linearen Ordnung kleinsten Begriffsumfang nach A zu finden.
  3. die Begriffsumfänge können nun systematisch nacheinander (beginnend mit dem kleinsten Begriffsumfang) gebildet werden

Schritt 1: lektische Ordnung der Potenzmenge

Definition 3. *Sei $G = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und seien $A, B \subseteq G$. Dann heißt A **lektisch kleiner** als B, falls das kleinste Element, in dem sich A und B unterscheiden zu B gehört. Anders ausgedrückt:*

$$A < B \text{ g.d.w. } \exists i \in B \setminus A : A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}.$$

$<$ definiert eine strikte lineare Ordnung auf der Potenzmenge (Menge der Teilmengen) von G.

Schritt 2: Bestimmung des lektisch kleinsten Begriffsumfangs nach $A \subseteq G$

Definition 4. *Definiere*

$$A <_i B \text{ g.d.w. } i \in B \setminus A \text{ und } A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}$$

$$A \oplus i \stackrel{\text{def}}{=} ((A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} \cup \{i\})''$$

Lemma 5. *Seien A, B und i wie in der vorangegangen Definition, dann gilt:*

1. $A < B \Leftrightarrow A <_i B$ *für ein* $i \in G$.
2. $A <_i B$ *und* $A <_j C$ *mit* $i < j \;\Rightarrow\; C <_i B$.
3. $i \notin A \Rightarrow A < A \oplus i$.
4. $A <_i B$ *und* B *Begriffsumfang* $\Rightarrow A \oplus i \subseteq B$, *d.h.* $A \oplus i \leq B$.
5. $A <_i B$ *und* B *Begriffsumfang* $\Rightarrow A <_i A \oplus i$.

Proposition 6. *Der kleinste Begriffsumfang, der bezüglich der lektischen Ordnung größer ist als eine gegebene Menge $A \subset G$, ist $A \oplus i$, wobei i das größte Element von G ist mit $A <_i A \oplus i$.*

Algorithmus zur Bestimmung aller Begriffsinhalte eines Kontextes

1. Der lektisch kleinste Begriffsinhalt ist $\emptyset''$.
2. Ist A als Begriffsinhalt bestimmt, so findet man den lektisch nächsten Begriffsinhalt, indem man alle Merkmale $i \in M \setminus A$ prüft, beginnend mit dem größten, und dann in absteigender Reihenfolge, bis erstmals $A <_i (A \oplus i)''$ gilt. $(A \oplus i)''$ ist dann der nächste Begriffsinhalt.
3. Wenn $(A \oplus i)'' = M$ dann bist du fertig, wenn nicht, dann verwende $(A \oplus i)''$ als neues A und mache bei (2) weiter.

Beispiel

	fliegen (1)	schwimmen (2)	groß (3)	ziehen (4)
Storch	$\times$		$\times$	$\times$
Ente	$\times$	$\times$		$\times$
Spatz	$\times$			

A	i	$A \oplus i$	$(A \oplus i)''$	$A <_i (A \oplus i)''$	neuer Inhalt