Seminar: Formale Begriffsanalyse
Formale Kontexte und Begriffsverbände

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de

25. April 2006

Formaler Kontext

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

Definition 1. *Ein* **formaler Kontext** K *ist ein Tripel* (G, M, I), *bestehend aus einer Menge von Gegenständen* G, *einer Menge von Merkmalen* M *und einer binären* **Inzidenzrelation** $I \subseteq G \times M$; *wobei* $(g, m) \in I$ *gelesen wird als "der formale Gegenstand* g *hat das formale Merkmal* m*" oder "das formale Merkmal* m *trifft auf den formalen Gegenstand* g *zu".*

Die Ableitungsrelation

Definition 2. *Es sei* $K = (G, M, I)$ *ein formaler Kontext. Für eine Menge* $A \subseteq G$ *von Gegenständen definieren wir*

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \,|\, \forall g \in A : (g, m) \in I\}$$

(A' ist die Menge der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände in A).

Entsprechend ist für eine Menge $B \subseteq M$ von Merkmalen

$$B' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \,|\, \forall m \in B : (g, m) \in I\}$$

definiert (B' ist die Menge der Gegenstände, die alle Merkmale aus B haben).

Veranschaulichung der Ableitungsrelation

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

(G, M, I) formaler Kontext
$A, A_1, A_2 \subseteq G$ Mengen von Gegenständen
$B, B_1, B_2 \subseteq M$ Mengen von Merkmalen

1) wenn $A_1 \subseteq A_2$, dann $A_2' \subseteq A_1'$
1') wenn $B_1 \subseteq B_2$, dann $B_2' \subseteq B_1'$
2) $A \subseteq A''$
2') $B \subseteq B''$
3) $A' = A'''$
3') $B' = B'''$

formaler Begriff

Definition 3. *Sei $K = (G, M, I)$ ein formaler Kontext;*
ein ***formaler Begriff*** *ist ein Paar $(A, B) \subseteq G \times M$,*
mit $A = B'$ und $B = A'$.
A heißt die ***Extension*** *bzw. der* ***Umfang*** *und*
B die ***Intension*** *bzw. der* ***Inhalt*** *des Begriffs (A, B).*
$\mathcal{B}(G, M, I)$ bezeichnet die Menge aller formalen Begriffe des Kontextes (G, M, I).

Gegenstands- und Merkmalsbegriffe

Definition 4. *Für einen Gegenstand $g \in G$ schreiben wir g' statt $\{g\}'$ für den* ***Gegenstandsinhalt***.
Für ein Merkmal $m \in M$ schreiben wir m' statt $\{m\}'$ für den ***Merkmalsumfang***.
Ferner schreiben wir γg für den ***Gegenstandsbegriff*** *(g'', g') und μm für den* ***Merkmalsbegriff*** *(m', m'').*

Eigenschaften formaler Kontexte und Begriffe

Lemma 5. *Jeder formale Begriff eines Kontextes (G, M, I) ist von der Form (X'', X') für eine Teilmenge $X \subseteq G$ und von der Form (Y', Y'') für eine Teilmenge $Y \subseteq M$. Umgekehrt ist jedes solche Paar ein formaler Begriff.*

Jeder Begriffsumfang ist Durchschnitt von Merkmalsumfängen und jeder Begriffsinhalt ist Durchschnitt von Gegenstandsinhalten.

Übungsaufgabe: Verwandtschaftskontext

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Kind	×		×			×
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Papa	×	×		×		×
Mama	×	×			×	×

	Extension									Intension					
	Vater	Mutter	Bruder	Schwester	Kind	Sohn	Tochter	Papa	Mama	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
B1															
B2															
B3															
B4															
B5															
B6															
B7															
B8															
B9															
B10															
B11															
B12															
B13															

Tragen sie die Menge aller Begriffe zu dem Beispielkontext “Verwandtschaft” in die rechte Tabelle ein.

binäre Relation

Definition 6. *Eine **binäre Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Menge von Paaren (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, also $R \subseteq M \times N$.*

Statt $(m, n) \in R$ schreibt man auch mRn.

*Ist $M = N$, so ist R eine **binäre Relation auf der Menge** M.*

*$R^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{(n, m) \mid (m, n) \in R\}$ ist die zu R **inverse Relation**.*

besondere binäre Relationen

Definition 7. *Eine binäre Relation R auf M heißt:*

reflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : xRx$,

irreflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : \neg xRx$,

symmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* yRx,

asymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* $\neg yRx$,

antisymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy *und* $x \neq y$, *dann* $\neg yRx$,

konnex / linear *g.d.w.* $\forall x, y \in M : xRy$ *oder* yRx *oder* $x = y$,

transitiv *g.d.w.* $\forall x, y, z \in M$: *wenn* xRy *und* yRz, *dann* xRz.

Äquivalenzrelation

Definition 8. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und $a, b \in M$, so schreibt man statt aRb auch $a \sim_R b$ und sagt: a ist äquivalent zu b bezüglich R.

Man kann die Elemente von M in Klassen äquivalenter Elemente einteilen; für ein Element $a \in M$ heißt die Klasse

$$[a]_R \overset{\text{def}}{=} \{b : b \in M \text{ und } a \sim_R b\}$$

*die **Äquivalenzklasse** von a bezüglich R. Die Menge*

$$M/R \overset{\text{def}}{=} \{[a]_R : a \in M\}$$

*aller Äquivalenzklassen von Elementen aus M bezüglich R heißt **Quotient** von M bezüglich R.*

Eigenschaften der Äquivalenzrelation

Bemerkung: Seien a und b Elemente einer Menge M und R eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt:

$$[a]_R \neq \emptyset, \qquad [a]_R = [b]_R \text{ g.d.w. } a \sim_R b, \qquad a \nsim b \text{ g.d.w. } [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

Ordnungsrelationen

Definition 10. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

Quasiordnung/Präordnung, *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*
(Beispiel: in derselben Schulklasse sein; Äquivalenzrelationen)

partielle Ordnung, *wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subseteq)$)

lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$)

(M, R) *heißt partiell/linear ...* ***geordnete Menge***.

Bemerkung: Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

strikte Ordnungen

Definition 12. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

strikte partielle Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subset)$)

totale / strikt lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), <)$)

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

Nachbar / Hassediagramm

Definition 13. *Seien a und b zwei Elemente einer geordneten Menge $(M, \subseteq)$, b heißt* ***oberer Nachbar*** *von a g.d.w. $a \subseteq b$ und $a \neq b$ und wenn es kein von a und b verschiedenes Element c von M gibt, für das $a \subseteq c \subseteq b$ gilt. Man schreibt dann auch* $\mathbf{a \prec b}$.

Bemerkung: Jede Ordnung $\subseteq$ auf einer Menge M legt eine natürliche Äquivalenzrelation '$=$' auf M fest: $\forall a, b \in M : a = b \Leftrightarrow a \subseteq b$ und $b \subseteq a$. Eine endliche geordnete Mengen $(M, \subseteq)$ kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jede $=$-Äquivalenzklasse von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daß $[a]$ unterhalb von $[b]$ liegt, wenn $[a] \subseteq [b]$. Zwei Punkte $[a]$ und $[b]$ werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

Übungsaufgaben

1. Stelle möglichst viele (mindestens zwei) Sätze über Relationen auf und beweise sie.
   Bsp.: Jede transitive Relation, die symmetrisch ist, ist reflexiv.

2. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge
   $M = (\{\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,5\}, \{1,3,4\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,5\}, \{1,\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$ und bestimme die Weite und Länge von M.