

# Formale Begriffsanalyse mehrwertige Kontexte und begriffliche Skalierung

Folien angelehnt an  
Folien von Gerd Stumme zur Veranstaltung “Formale  
Begriffsanalyse” 2005

# Mehrwertige Kontexte

- Preis, Gewicht, Genus, Kasus, ... sind typische **mehrwertige Merkmale**.

	Abbruchnach	Teilnehmer	Platzbedarf	Ballspiel	Zuschauerzahl
Handball	60 min.	2×7	mittel	direkt	mittel
Fußball	90 min.	2×11	hoch	direkt	hoch
Volleyball	Ergebnis	2×6	mittel	direkt	mittel
Basketball	40 min.	2×5	mittel	direkt	mittel
Golf	Ergebnis	bel.×1	hoch	mit Schläger	niedrig
Tennis-Einzel	Ergebnis	2×1	mittel	mit Schläger	mittel
Tennis-Doppel	Ergebnis	2×2	mittel	mit Schläger	mittel
Schach	Ergebnis	2×1	gering	nein	niedrig

# formaler mehrwertiger Kontext

- Ein **mehrwertiger Kontext** ist ein 4-Tupel  $(G, M, W, I)$  mit Mengen  $G, M, W$  und einer Relation  $I \subseteq (G \times M \times W)$ .

Es gilt:

aus  $(g, m, w) \in I$  und  $(g, m, v) \in I$  folgt  $w = v$

# Terminologie (1)

- Ist  $(G, M, W, I)$  ein mehrwertiger Kontext, so nennen wir die Elemente von  $G$  die **Gegenstände**, die von  $M$  die **(mehrwertigen) Merkmale** und die von  $W$  die **Merkmalsausprägungen** oder Werte.
- $(g, m, w) \in I$  wird gelesen als "das Merkmal  $m$  hat beim Gegenstand  $g$  den Wert  $w$ ".
- Die mehrwertigen Merkmale können als partielle Abbildungen aus  $G$  in  $W$  aufgefaßt werden, wir schreiben daher häufig  $m(g) = w$  statt  $(g, m, w) \in I$

# Terminologie (2)

- Der **Definitionsbereich** eines Merkmals  $m$  wird definiert als
$$\text{dom}(m) := \{g \in G \mid (g, m, w) \in I \text{ und } w \in W\}$$
- Das Merkmal  $m$  heißt **vollständig**, falls  $\text{dom}(m) = G$ .
- Ein mehrwertiger Kontext heißt **vollständig**, falls alle Merkmale vollständig sind.
- Ein mehrwertiger Kontext  $(G, M, W, I)$  heißt **n-wertig**, falls  $W$   $n$  Elemente hat.

# Wie kann man einem mehrwertigen Kontext Begriffe zuordnen?

- Der mehrwertige Kontext wird in einen einwertigen Kontext umgewandelt.
- Die Begriffe des abgeleiteten einwertigen Kontext werden als Begriffe des mehrwertigen Kontextes gedeutet (**begriffliche Skalierung**).
- Die begriffliche Skalierung ist nicht eindeutig!!!

# begriffliche Skalierung

- Jedes Merkmal eines mehrwertigen Kontextes wird durch einen Kontext (begriffliche Skala) interpretiert.

Def.: Eine **Skala** zum Merkmal  $m$  eines mehrwertigen Kontextes ist ein einwertiger Kontext

$$S_m := (G_m, M_m, I_m) \text{ mit } m(G) \subseteq G_m.$$

Die Gegenstände der Skalen heißen **Skalenwerte**, die Merkmale **Skalenmerkmale**.

- Die einzelnen Skalen werden zu einem einwertigen Kontext zusammengefaßt (**Skalierung**).

# Skalen für Ballspielkontext

	Zeit	Ergebnis
60 min.	×	
90 min.	×	
Ergebnis		×
40 min.	×	

§ Abbruch nach

	Ball- spiel	Ballspiel direkt	Ballspiel mit Schläger
direkt	×	×	
mit Schläger	×		×
nein			

§ Ballspiel

	≥hoch	≥mittel	≤mittel	≤gering
hoch	×	×		
mittel		×	×	
gering			×	×

§ Platzbedarf

	≥hoch	≥mittel
hoch	×	×
mittel		×
niedrig		

§ Zuschauerzahl

	2 Parteien	bel. viele Parteien	1 Spieler je Partei	>1 Spieler je Partei
2×7	×			×
2×11	×			×
2×6	×			×
2×5	×			×
bel.×1		×	×	
2×2	×			×
2×1	×		×	

§ Teilnehmer

# Schlichte Skalierung

Def: Zum mehrwertigen Kontext  $(G, M, W, I)$  mit Skalenkontexten  $S_m$  ist  $(G, N, J)$  der abgeleitete Kontext bzgl. der **schlichten Skalierung**, dabei gilt:

$$N := \dot{\bigcup}_{m \in M} M_m \quad \text{und} \quad gJ(m, n) : \Leftrightarrow m(g) = w \quad \text{und} \quad wI_m n$$

anschaulich: In der Tabellendarstellung des Kontextes  $(G, M, W, I)$  wird jede Merkmalsausprägung  $m(g)$  durch die zu  $m(g)$  gehörende Zeile des Skalenkontextes  $S_m$  ersetzt.

# einwertiger Ballspielkontext

	Abbruch		Teilnehmer			Platzbedarf				Ballspiel mit			Zu- schauer	
	Zeit	Erg.	2	Part. bel.	Sp. je P.	$\geq h$	$\geq m$	$\leq m$	$\leq g$	ja	dir.	Schl.	$\geq h$	$\geq m$
Handball	x		x		x		x	x		x	x			x
Fußball	x		x		x	x	x			x	x		x	x
Volleyball		x	x		x		x	x		x	x			x
Basketball	x		x		x		x	x		x	x			x
Golf		x		x	x	x	x			x		x		
Tennis-E.		x	x		x		x	x		x		x		x
Tennis-D.		x	x		x		x	x		x		x		x
Schach		x	x		x			x	x					



# Elementarskalen

- Skalen können theoretisch beliebig frei gewählt werden, sollten sie aber nicht!
  - Die Eigenschaften des abgeleiteten einwertigen Kontextes hängen von den gewählten Skalen ab.
- ⇒ wähle bedeutungstragende Skalen  
(Interpretationsentscheidung)
- nützliche, häufig verwendete Skalen sind die Elementarskalen.

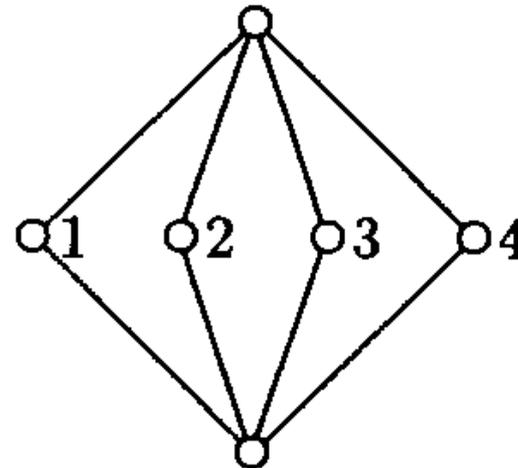
# Nominalskala

$$N_n := (n, n, =)$$

- Skalierung von Merkmalen, deren Ausprägungen sich gegenseitig ausschließen (z.B. Kasus, Genus,...).

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

Die Nominalskala  $N_4$ .



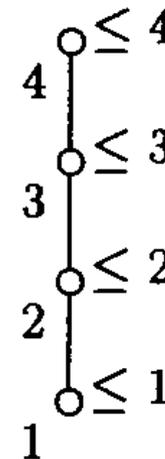
# Ordinalskala

$$O_n := (n, n, \leq)$$

- Skalierung mehrwertiger Merkmale, deren Ausprägungen geordnet sind und bei denen jede Merkmalsausprägung die jeweils schwächere impliziert (Beispiel „höchstens x Spieler“).

$\mathbb{O}_4 =$

	1	2	3	4
1	x	x	x	x
2		x	x	x
3			x	x
4				x



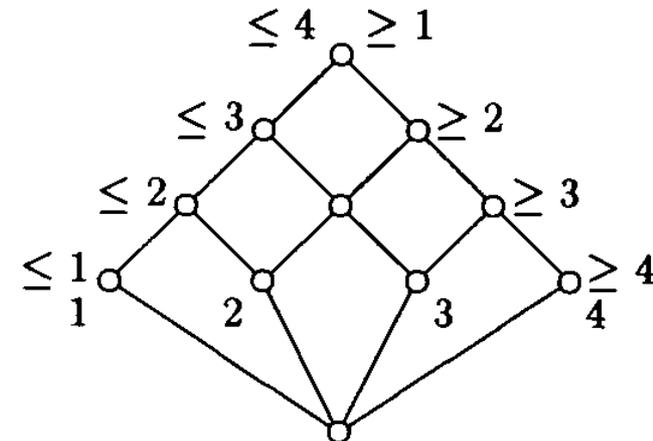
# Interordinalskala

$$I_n := (n, n, \leq) \mid (n, n, \geq)$$

- Skalierung von Intervallzugehörigkeiten (kann gut bei der Auswertung von skalierten „trifft zu“-„trifft nicht zu“-Fragebögen verwendet werden).

$\mathbb{I}_4 =$

	$\leq 1$	$\leq 2$	$\leq 3$	$\leq 4$	$\geq 1$	$\geq 2$	$\geq 3$	$\geq 4$
1	x	x	x	x	x			
2		x	x	x	x	x		
3			x	x	x	x	x	
4				x	x	x	x	x



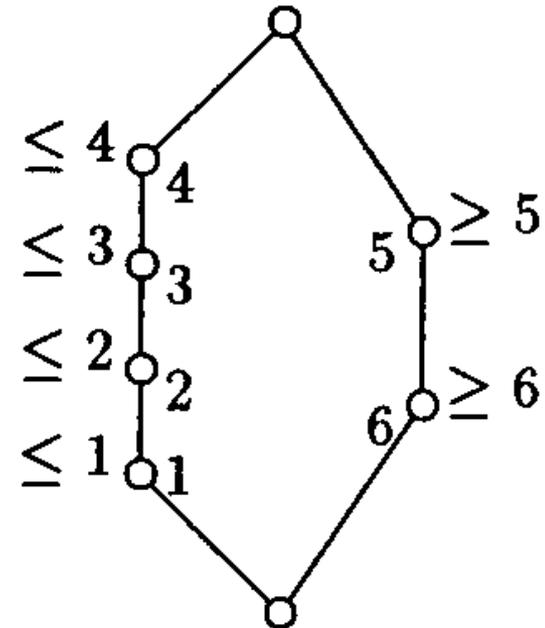
# Biordinalskala

$$M_{n,m} := (n, n, \leq) \cup (m, m, \geq)$$

- Skalierung von gewerteten Gegensatzpaaren (laut  $\supset$  sehr laut leise  $\supset$  sehr leise, Schulnoten: bestanden, nicht bestanden).

$M_{4,2} =$

	$\leq 1$	$\leq 2$	$\leq 3$	$\leq 4$	$\geq 5$	$\geq 6$
1	x	x	x	x		
2		x	x	x		
3			x	x		
4				x		
5					x	
6					x	x



# Dichotome Skala

$$D := (\{0,1\}, \{0,1\}, =)$$

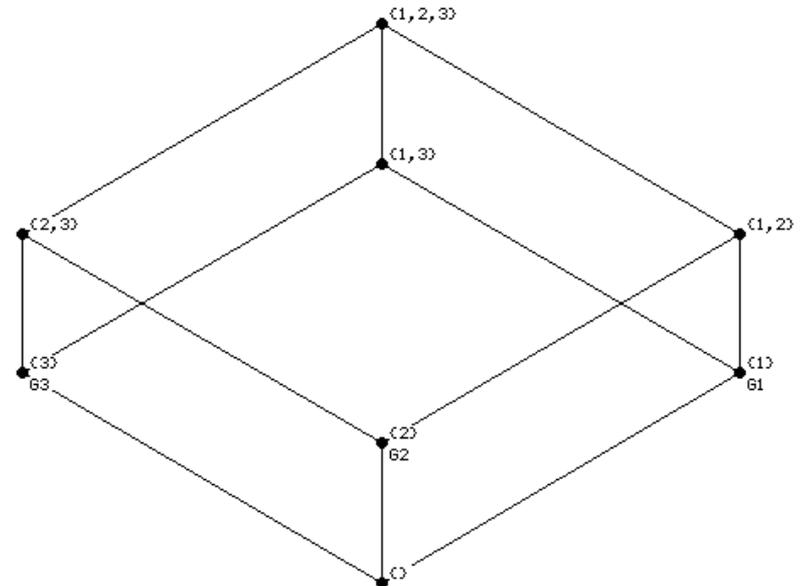
- In einwertigen Kontexten sind „leere Zellen“ nicht begriffsbildend. Mit Hilfe der dichotomen Skala wird die Negation eines Merkmals zur Begriffsbildung hinzugezogen (männlich – weiblich).

	0	1
0	×	
1		×

# Boolsche Skala

- In Fällen in denen die Merkmalsausprägung auch eine Menge von Werten sein kann, bietet sich eine Boolsche Skala an.

	$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
1		X			X	X		X
2			X		X		X	X
3				X		X	X	X



# Beispiel aus Stumme (2005)

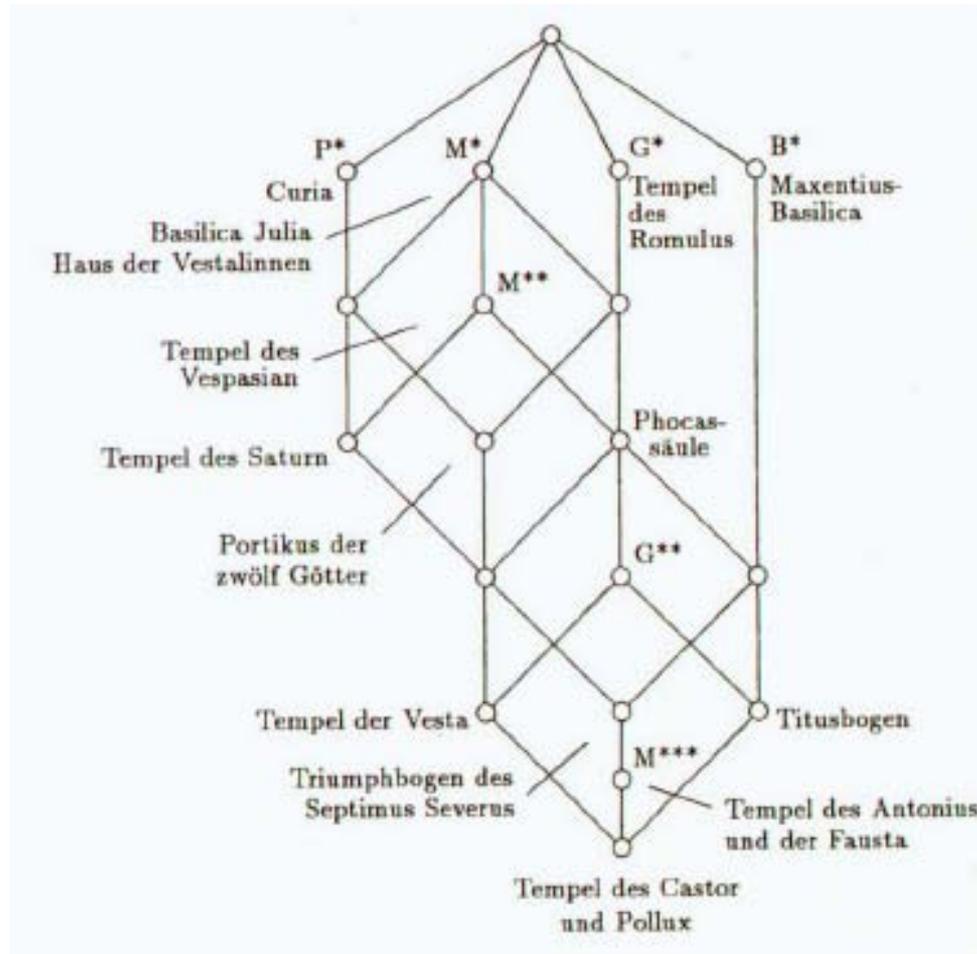
Forum Romanum		B	GB	M	P
1	Triumphbogen des Septimus Severus	*	*	**	*
2	Titusbogen	*	**	**	
3	Basilica Julia			*	
4	Maxentius-Basilica	*			
5	Phocassäule		*	**	
6	Curia				*
7	Haus der Vestalinnen			*	
8	Portikus der zwölf Götter		*	*	*
9	Tempel des Antonius und der Fausta	*	*	**	*
10	Tempel des Castor und Pollux	*	**	**	*
11	Tempel des Romulus		*		
12	Tempel des Saturn			**	*
13	Tempel des Vespasian			**	
14	Tempel der Vesta		**	**	*

Beispiel eines ordinalen Kontextes: Bewertungen von Monumenten des Forum Romanum in verschiedenen Reiseführern (B = Baedeker, GB = Les Guides Bleus, M = Michelin, P = Polyglott). Ordinal wird der Kontext durch die Anzahl der jeweils vergebenen Sterne; ist kein Stern angegeben, so wird dies als Null gewertet.

# Beispiel aus Stumme (2005)

Forum Romanum	Baedeker		Les Guides Bleus		Michelin			Polyglott
	≥1	≥1	≥2	≥1	≥2	≥3	≥1	
Triumphbogen des Septimus Severus	X	X		X	X		X	
Titusbogen	X	X	X	X	X			
Basilica Julia				X				
Maxentius-Basilica	X							
Phocassäule		X		X	X			
Curia							X	
Haus der Vestalinnen				X				
Portikus der zwölf Götter		X		X			X	
Tempel des Antonius und der Fausta	X	X		X	X	X	X	
Tempel des Castor und Pollux	X	X	X	X	X	X	X	
Tempel des Romulus		X						
Tempel des Saturn				X	X		X	
Tempel des Vespasian				X	X			
Tempel der Vesta		X	X	X	X		X	

# Beispiel aus Stumme (2005)



Der Begriffsverband zum Kontext