Einführung in die Computerlinguistik – Satz von Kleene

Dozentin: Wiebke Petersen

10.5.2010

Satz von Kleene

(Stephen C. Kleene, 1909 - 1994)

Jede Sprache, die von einem deterministischen endlichen Automaten akzeptiert wird ist regulär und jede reguläre Sprache wird von einem deterministischen endlichen Automaten akzeptiert.

Wiederholung: reguläre Sprachen

RE: syntax

The set of regular expressions RE_Σ over an alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ is defined by:

- $\underline{\emptyset}$ is a regular expression.
- ϵ is a regular expression.
- $a_1, \ldots, a_n$ are regular expressions
- If a and b are regular expressions over Σ then
  - $(a + b)$
  - $(a \bullet b)$
  - $(a^\star)$

  are regular expressions too.

Wiederholung: reguläre Sprachen

RE: semantics

Each regular expression r over an alphabet Σ describes a formal language $L(r) \subseteq \Sigma^*$.
Regular languages are those formal languages which can be described by a regular expression.
The function L is defined inductively:

- $L(\underline{\emptyset}) = \emptyset$, $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$, $L(a_i) = \{a_i\}$
- $L(a + b) = L(a) \cup L(b)$
- $L(a \bullet b) = L(a) \circ L(b)$
- $L(a^\star) = L(a)^*$

Finite-state automatons accept regular languages

Theorem (Kleene)

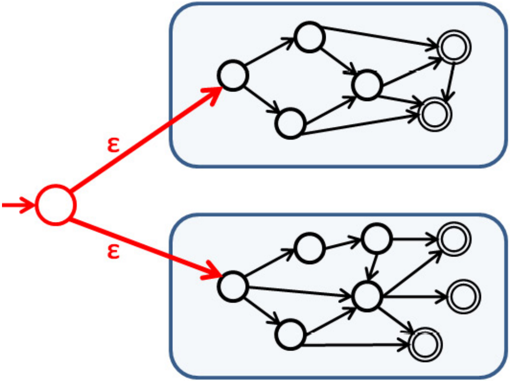
Every language accepted by a DFSA is regular and every regular language is accepted by some DFSA.

proof idea (one direction): Each regular language is accepted by a NDFSA (and therefore by a DFSA):

$L(\emptyset)$ $L(\epsilon)$ $L(a_i)$

Proof of Kleene's theorem (cont.)

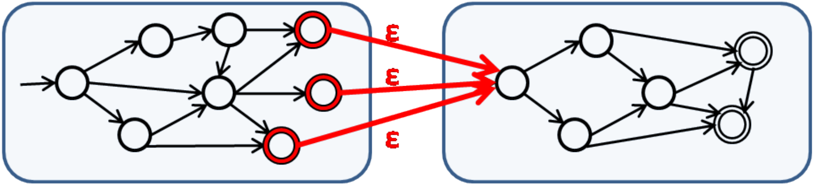
If R_1 and R_2 are two regular expressions such that the languages $L(R_1)$ and $L(R_2)$ are accepted by the automatons $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ respectively, then $L(R_1 + R_2)$ is accepted by:



$L(R_1+R_2)$

Proof of Kleene's theorem (cont.)

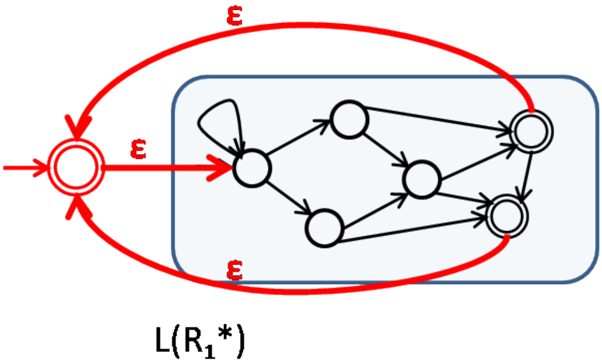
$L(R_1 \bullet R_2)$ is accepted by:



$L(R_1 \bullet R_2)$

Proof of Kleene's theorem (cont.)

$L(R_1^*)$ is accepted by:



Abschlußeigenschaften regulärer Sprachen

Theorem

1. *If L_1 and L_2 are two regular languages, then*
   - *the union of L_1 and L_2 ($L_1 \cup L_2$) is a regular language too.*
   - *the intersection of L_1 and L_2 ($L_1 \cap L_2$) is a regular language too.*
   - *the concatenation of L_1 and L_2 ($L_1 \circ L_2$) is a regular language too.*
2. *The complement of every regular language is a regular language too.*
3. *If L is a regular language, then L^* is a regular language too.*

Beweisidee

a Die Aussage für die Vereinigung, die Konkatenation und den Kleeneschen Stern folgt unmittelbar aus dem Satz von Kleene.

b Das Komplement einer regulären Sprache L wird wie folgt konstruiert: (1) konstruiere einen deterministischen, endlichen Automaten mit vollständiger Übergangsfunktion, der L akzeptiert. (2) Wechsle alle Nichtend- zu Endzuständen und umgekehrt. Der resultierende Automat akzeptiert $\bar{L}$.

c Die Aussage über den Schnitt zweier regulärer Sprachen folgt aus der Aussage über die Vereinigung, das Komplement und das Gesetz von De Morgan.

Hausaufgabe (Abgabe bis zum 20.5.2010; BN: entweder Aufgabe 1 oder Aufgabe 2 und 3)

1. Beschreiben sie mit ihren eigenen Worten, wie die Automaten für die Sprachen
    1. $L(R_1 + R_2)$,
    2. $L(R_1 \bullet R_2)$ und
    3. $L(R_1^*)$

    systematisch aus den Automaten für die Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ konstruiert werden können. (Wenn Ihnen die allgemeine Beschreibung schwerfällt, dann wählen Sie bitte als Beispiel zwei reguläre Ausdrücke R_1 und R_2 und bilden für dieses Beispiel systematisch $L(R_1 + R_2)$, $L(R_1 \bullet R_2)$ und $L(R_1^*)$).
2. Bilden Sie mithilfe des auf den Folien angedeuteten Verfahrens das Komplement im Universum $L((a + b)^*)$ von
    1. $L(ab)$,
    2. $L(ba^*)$
3. Bilden Sie einen Automaten, der die Schnittmenge der beiden Sprachen $L(b^*a^*)$ und $L(bbaa^*)$ akzeptiert.