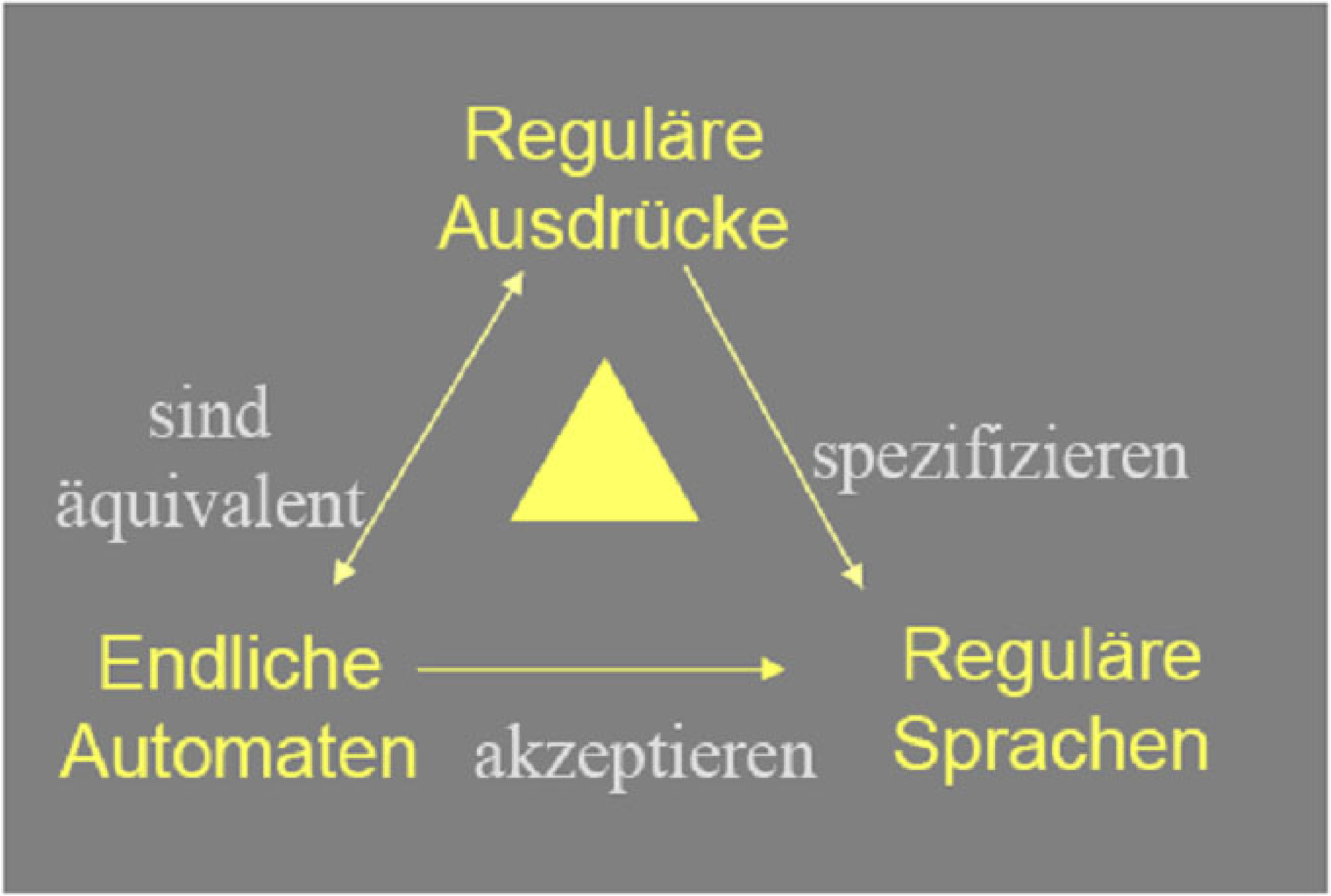
Einführung in die Computerlinguistik

Kontextfreie Sprachen und Pushdown-Automaten

Dozentin: Wiebke Petersen

WS 2004/2005

Wiederholung



zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.

zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.
   L_1 ist regulär (L_1 akzeptierenden Automaten / L_1 erzeugende rechts-lineare Grammatik / regulärer Ausdruck)

zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.
   L_1 ist regulär (L_1 akzeptierenden Automaten / L_1 erzeugende rechts-lineare Grammatik / regulärer Ausdruck)

2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält die gleiche Anzahl von $b's$ und $a's\}$.

zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.
   L_1 ist regulär (L_1 akzeptierenden Automaten / L_1 erzeugende rechts-lineare Grammatik / regulärer Ausdruck)

2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält die gleiche Anzahl von $b's$ und $a's\}$.
   L_2 ist nicht regulär (Schnitt mit regulärer Sprache und Pumping-Lemma), obwohl für alle $v \in L_2$ auch $v^i \in L_2$

zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.
   L_1 ist regulär (L_1 akzeptierenden Automaten / L_1 erzeugende rechts-lineare Grammatik / regulärer Ausdruck)

2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält die gleiche Anzahl von $b's$ und $a's\}$.
   L_2 ist nicht regulär (Schnitt mit regulärer Sprache und Pumping-Lemma), obwohl für alle $v \in L_2$ auch $v^i \in L_2$

3. w^R ist das Wort w in umgekehrter Reihenfolge.
   $L_3 = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$.

zu den Hausaufgaben

Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Abschlußeigenschaften der regulären Sprachen und dem Pumping-Lemma über die Komplexität folgender formaler Sprachen machen:

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält eine ungerade Anzahl von $b's\}$.
   L_1 ist regulär (L_1 akzeptierenden Automaten / L_1 erzeugende rechts-lineare Grammatik / regulärer Ausdruck)

2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält die gleiche Anzahl von $b's$ und $a's\}$.
   L_2 ist nicht regulär (Schnitt mit regulärer Sprache und Pumping-Lemma), obwohl für alle $v \in L_2$ auch $v^i \in L_2$

3. w^R ist das Wort w in umgekehrter Reihenfolge.
   $L_3 = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$.
   L_3 ist nicht regulär (Schnitt mit regulärer Sprache und Pumping-Lemma)

kontextfreie Sprachen

Definition 1. *Eine Grammatik* (N, T, S, P) *heißt* **kontextfrei***, wenn alle Regeln/Produktionen die folgende Form haben:*

$$A \rightarrow \alpha, \text{ wobei } A \in N \textit{ und } \alpha \in (T \cup N)^{*}.$$

Eine durch eine kontextfreie Grammatik erzeugte Sprache heißt **kontextfrei***.*

kontextfreie Sprachen

Definition 1. *Eine Grammatik (N, T, S, P) heißt* **kontextfrei***, wenn alle Regeln/Produktionen die folgende Form haben:*

$$A \rightarrow \alpha, \text{ wobei } A \in N \textit{ und } \alpha \in (T \cup N)^*.$$

Eine durch eine kontextfreie Grammatik erzeugte Sprache heißt **kontextfrei***.*

Satz 2. *Die Menge der kontextfreien Sprachen ist eine echte Obermenge der Menge der regulären Sprachen*

kontextfreie Sprachen

Definition 1. *Eine Grammatik (N, T, S, P) heißt* **kontextfrei***, wenn alle Regeln/Produktionen die folgende Form haben:*

$$A \rightarrow \alpha, \text{ wobei } A \in N \textit{ und } \alpha \in (T \cup N)^*.$$

Eine durch eine kontextfreie Grammatik erzeugte Sprache heißt **kontextfrei***.*

Satz 2. *Die Menge der kontextfreien Sprachen ist eine echte Obermenge der Menge der regulären Sprachen*

Beweis: Jede reguläre Sprache ist per Definition auch kontextfrei und es gibt mindestens eine kontextfreie Sprache, nämlich $a^n b^n$, die nicht regulär ist. $(S \rightarrow aSb, S \rightarrow \epsilon)$

Beispiel einer kontextfreien Sprache

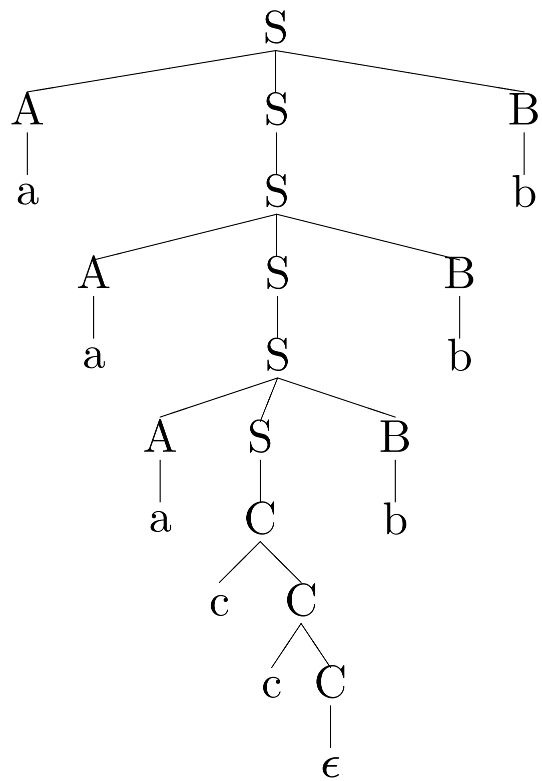
$$G = \langle \{\mathsf{S}, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}, \{a, b, c\}, \mathsf{S}, P \rangle$$

$$P = \left\{ \begin{array}{cclccc} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{ASB} & \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{C} \\ \mathsf{A} & \longrightarrow & a & \mathsf{B} & \longrightarrow & b \\ \mathsf{C} & \longrightarrow & cC & \mathsf{C} & \longrightarrow & \epsilon \end{array} \right\}$$

Beispiel einer kontextfreien Sprache

$$G = \langle \{\mathsf{S}, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}, \{a, b, c\}, \mathsf{S}, P \rangle$$

$$P = \left\{ \begin{array}{cclccl} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{ASB} & \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{C} \\ \mathsf{A} & \longrightarrow & a & \mathsf{B} & \longrightarrow & b \\ \mathsf{C} & \longrightarrow & cC & \mathsf{C} & \longrightarrow & \epsilon \end{array} \right\}$$



weitere kontextfreie Sprachen

- $L_1 = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$
- $L_2 = \{a^i b^j : i \geq j\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^*$: Zahl der $a's$ größer als Zahl der $b's\}$
- $L_4 = \{w \in \{a, b\}^*$: Zahl der $a's$ gleich Zahl der $b's\}$

weitere kontextfreie Sprachen

- $L_1 = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$
- $L_2 = \{a^i b^j : i \geq j\}$
- $L_3 = \{w \in \{a,b\}^*$: Zahl der $a's$ größer als Zahl der $b's\}$
- $L_4 = \{w \in \{a,b\}^*$: Zahl der $a's$ gleich Zahl der $b's\}$

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} S & \rightarrow & aB & A & \rightarrow & a & B & \rightarrow & b \\ S & \rightarrow & bA & A & \rightarrow & aS & B & \rightarrow & bS \\ & & & A & \rightarrow & bAA & B & \rightarrow & aBB \end{array} \right\}$$

ambige Grammatiken und ambige Sprachen

Definition 3. *Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Eine Ableitung bei der stets das am weitesten links stehende nichtterminale Symbol ersetzt wird, heißt* **Linksableitung**

ambige Grammatiken und ambige Sprachen

Definition 3. *Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Eine Ableitung bei der stets das am weitesten links stehende nichtterminale Symbol ersetzt wird, heißt* **Linksableitung**

Definition 4. *Eine kontextfreie Grammatik G heißt* **ambig** *genau dann, wenn es für ein $w \in L(G)$ mehrere Linksableitungen mit $S \rightarrow^* w$ gibt. Sonst heißt G* **eindeutig**.

ambige Grammatiken und ambige Sprachen

Definition 3. *Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Eine Ableitung bei der stets das am weitesten links stehende nichtterminale Symbol ersetzt wird, heißt* **Linksableitung**

Definition 4. *Eine kontextfreie Grammatik G heißt* **ambig** *genau dann, wenn es für ein $w \in L(G)$ mehrere Linksableitungen mit $S \rightarrow^* w$ gibt. Sonst heißt G* **eindeutig**.

Definition 5. *Eine kontextfreie Sprache L heißt* **ambig** *genau dann, wenn jede kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L$ ambig ist.*

ambige Grammatiken und ambige Sprachen

Definition 3. *Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Eine Ableitung bei der stets das am weitesten links stehende nichtterminale Symbol ersetzt wird, heißt* **Linksableitung**

Definition 4. *Eine kontextfreie Grammatik G heißt* **ambig** *genau dann, wenn es für ein $w \in L(G)$ mehrere Linksableitungen mit $S \rightarrow^* w$ gibt. Sonst heißt G* **eindeutig***.*

Definition 5. *Eine kontextfreie Sprache L heißt* **ambig** *genau dann, wenn jede kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L$ ambig ist.*

Ableitungsbäume und Linksableitungen

Zu jeder Linksableitung gibt es genau einen Ableitungsbaum
und
zu jedem Ableitungsbaum gibt es genau eine Linksableitung.

Beispiel einer ambigen Grammatik

$$G = (N, T, \mathsf{NP}, P) \text{ mit } N = \{\mathsf{S}, \mathsf{EN}, \mathsf{NP}, \mathsf{VP}, \mathsf{PP}, \mathsf{D}, \mathsf{N}, \mathsf{P}\},$$

$$T = \{\mathsf{Eva}, \mathsf{sieht}, \mathsf{den}, \mathsf{Mann}, \mathsf{mit}, \mathsf{dem}, \mathsf{Fernglas}\},$$

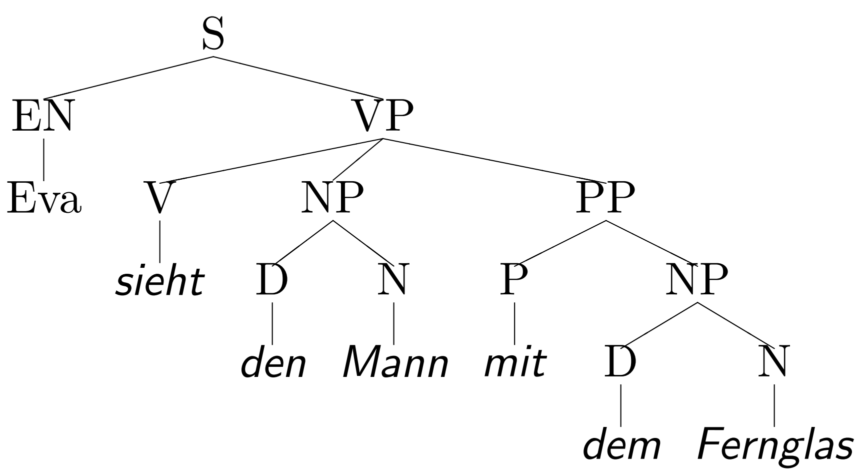
$$P = \left\{ \begin{array}{rcl rcl rcl} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{EN\ VP} & \mathsf{VP} & \longrightarrow & \mathsf{V\ NP} & \mathsf{VP} & \longrightarrow & \mathsf{V\ NP\ PP} \\ \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N} & \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N\ PP} & \mathsf{PP} & \longrightarrow & \mathsf{P\ NP} \\ \mathsf{EN} & \longrightarrow & \mathsf{Eva} & \mathsf{P} & \longrightarrow & \mathsf{mit} & \mathsf{V} & \longrightarrow & \mathsf{sieht} \\ \mathsf{D} & \longrightarrow & \mathsf{den} & \mathsf{D} & \longrightarrow & \mathsf{dem} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{Mann} \\ \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{Fernglas} & & & & & & \end{array} \right\}$$

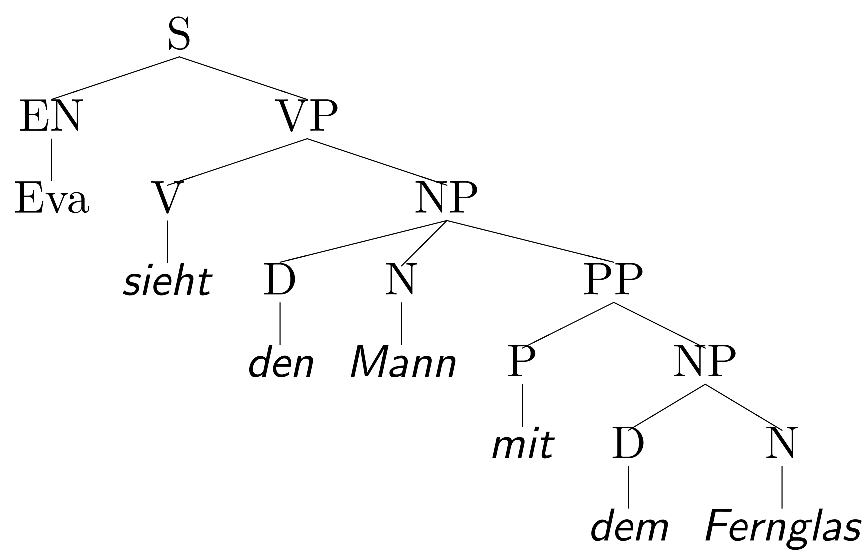
Beispiel einer ambigen Grammatik

$$G = (N, T, \mathsf{NP}, P) \text{ mit } N = \{\mathsf{S}, \mathsf{EN}, \mathsf{NP}, \mathsf{VP}, \mathsf{PP}, \mathsf{D}, \mathsf{N}, \mathsf{P}\},$$

$$T = \{\text{Eva}, \text{sieht}, \text{den}, \text{Mann}, \text{mit}, \text{dem}, \text{Fernglas}\},$$

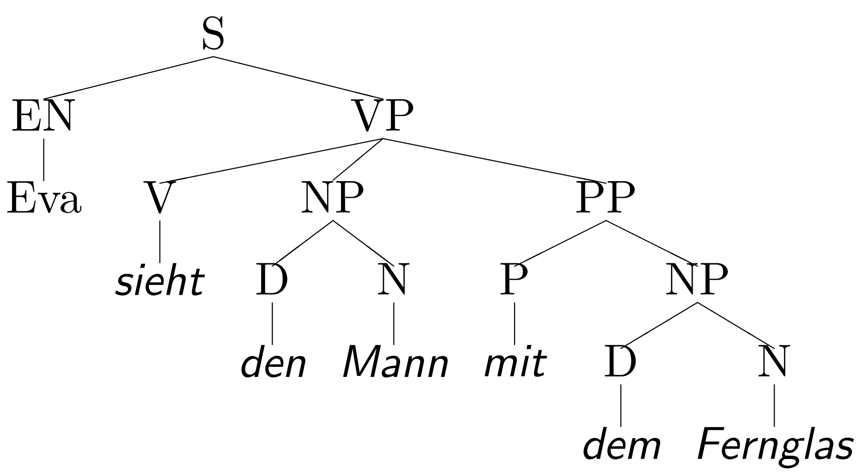
$$P = \left\{ \begin{array}{rcl rcl rcl} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{EN\ VP} & \mathsf{VP} & \longrightarrow & \mathsf{V\ NP} & \mathsf{VP} & \longrightarrow & \mathsf{V\ NP\ PP} \\ \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N} & \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N\ PP} & \mathsf{PP} & \longrightarrow & \mathsf{P\ NP} \\ \mathsf{EN} & \longrightarrow & \text{Eva} & \mathsf{P} & \longrightarrow & \text{mit} & \mathsf{V} & \longrightarrow & \text{sieht} \\ \mathsf{D} & \longrightarrow & \text{den} & \mathsf{D} & \longrightarrow & \text{dem} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \text{Mann} \\ \mathsf{N} & \longrightarrow & \text{Fernglas} & & & & & & \end{array} \right\}$$

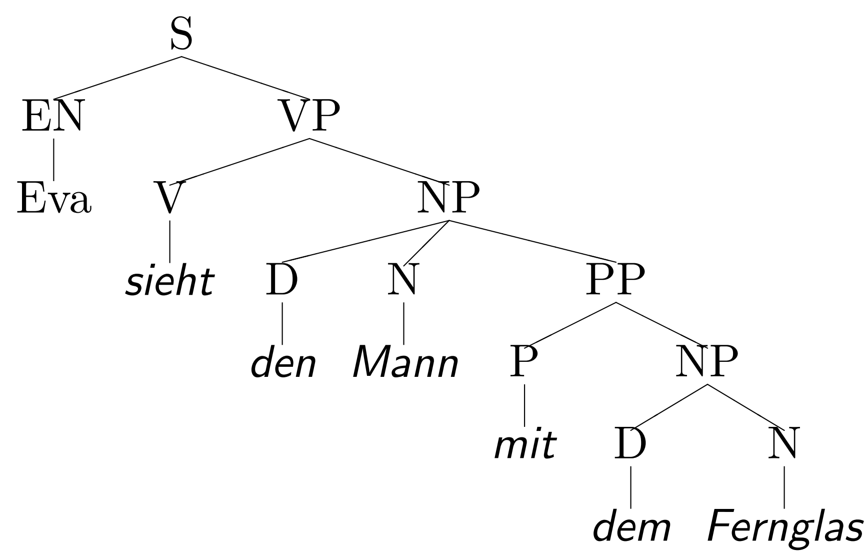


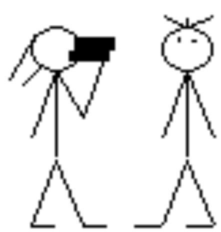


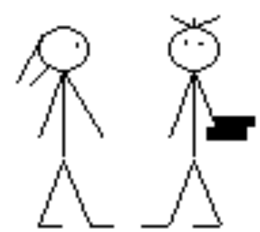
Beispiel einer ambigen Grammatik

$$G = (N, T, \text{NP}, P) \text{ mit } N = \{\text{S}, \text{EN}, \text{NP}, \text{VP}, \text{PP}, \text{D}, \text{N}, \text{P}\},$$
$$T = \{\text{Eva}, \text{sieht}, \text{den}, \text{Mann}, \text{mit}, \text{dem}, \text{Fernglas}\},$$
$$P = \left\{ \begin{array}{rclrclrcl} \text{S} & \rightarrow & \text{EN VP} & \text{VP} & \rightarrow & \text{V NP} & \text{VP} & \rightarrow & \text{V NP PP} \\ \text{NP} & \rightarrow & \text{D N} & \text{NP} & \rightarrow & \text{D N PP} & \text{PP} & \rightarrow & \text{P NP} \\ \text{EN} & \rightarrow & \text{Eva} & \text{P} & \rightarrow & \text{mit} & \text{V} & \rightarrow & \text{sieht} \\ \text{D} & \rightarrow & \text{den} & \text{D} & \rightarrow & \text{dem} & \text{N} & \rightarrow & \text{Mann} \\ \text{N} & \rightarrow & \text{Fernglas} & & & & & & \end{array} \right\}$$









2. Beispiel einer ambigen Grammatik

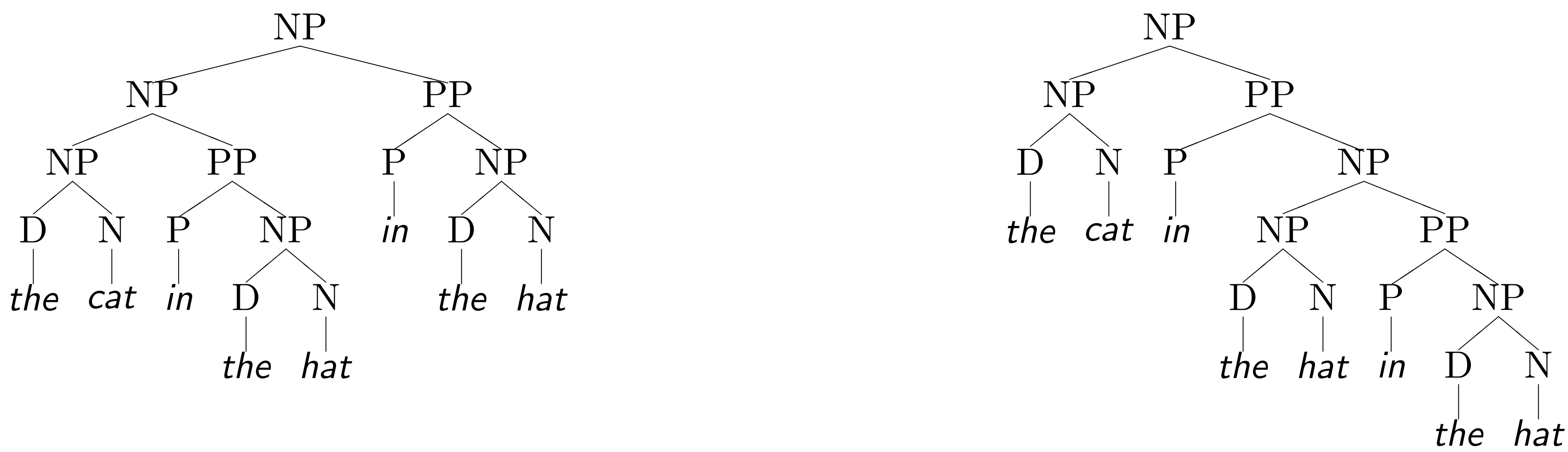
$G = (N, T, \mathsf{NP}, P)$ mit $N = \{\mathsf{D}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \mathsf{NP}, \mathsf{PP}\}$, $T = \{\mathsf{the}, \mathsf{cat}, \mathsf{hat}, \mathsf{in}\}$,

$$P = \left\{ \begin{array}{lllllllll} \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N} & \mathsf{D} & \longrightarrow & \mathsf{the} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{hat} \\ \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{NP\ PP} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{cat} & \mathsf{P} & \longrightarrow & \mathsf{in} \\ \mathsf{PP} & \longrightarrow & \mathsf{P\ NP} & & & & & & \end{array} \right\}$$

2. Beispiel einer ambigen Grammatik

$$G = (N, T, \mathsf{NP}, P) \text{ mit } N = \{\mathsf{D}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \mathsf{NP}, \mathsf{PP}\},\ T = \{\mathsf{the}, \mathsf{cat}, \mathsf{hat}, \mathsf{in}\},$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lllllllll} \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{D\ N} & \mathsf{D} & \longrightarrow & \mathsf{the} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{hat} \\ \mathsf{NP} & \longrightarrow & \mathsf{NP\ PP} & \mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{cat} & \mathsf{P} & \longrightarrow & \mathsf{in} \\ \mathsf{PP} & \longrightarrow & \mathsf{P\ NP} & & & & & & \end{array} \right\}$$



Chomsky-Normalform

Definition 6. *Eine Grammatik ist in* **Chomsky-Normalform** *(CNF), wenn alle Regeln die Gestalt*

1. $A \longrightarrow a$
2. $A \longrightarrow BC$

   mit $A, B, C \in T$ *und* $a \in \Sigma$ *haben (und gegebenenfalls* $S \longrightarrow \epsilon$*, dann aber ohne* S *auf den rechten Regelseiten).*

Chomsky-Normalform

Definition 6. *Eine Grammatik ist in* **Chomsky-Normalform** *(CNF), wenn alle Regeln die Gestalt*

1. $A \longrightarrow a$
2. $A \longrightarrow BC$

   mit $A, B, C \in T$ *und* $a \in \Sigma$ *haben (und gegebenenfalls* $S \longrightarrow \epsilon$*, dann aber ohne* S *auf den rechten Regelseiten).*

Satz 7. *Jede kontextfreie Sprache kann durch eine Grammatik in Chomsky-Normalform erzeugt werden.*

$$\textbf{Beispiel:} \left\{ \begin{array}{lllllllll} S & \longrightarrow & aB & A & \longrightarrow & a & B & \longrightarrow & b \\ S & \longrightarrow & bA & A & \longrightarrow & aS & B & \longrightarrow & bS \\ & & & A & \longrightarrow & bAA & B & \longrightarrow & aBB \end{array} \right\}$$

Chomsky-Normalform

Definition 6. *Eine Grammatik ist in* **Chomsky-Normalform** *(CNF), wenn alle Regeln die Gestalt*

1. $A \longrightarrow a$
2. $A \longrightarrow BC$

   mit $A, B, C \in T$ *und* $a \in \Sigma$ *haben (und gegebenenfalls* $S \longrightarrow \epsilon$*, dann aber ohne* S *auf den rechten Regelseiten).*

Satz 7. *Jede kontextfreie Sprache kann durch eine Grammatik in Chomsky-Normalform erzeugt werden.*

$$\textbf{Beispiel:} \left\{ \begin{array}{lllllllll} S & \longrightarrow & aB & A & \longrightarrow & a & B & \longrightarrow & b \\ S & \longrightarrow & bA & A & \longrightarrow & aS & B & \longrightarrow & bS \\ & & & A & \longrightarrow & bAA & B & \longrightarrow & aBB \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} S & \longrightarrow & A'B & A & \longrightarrow & a & A' & \longrightarrow & a \\ S & \longrightarrow & B'A & B & \longrightarrow & b & B' & \longrightarrow & b \\ A & \longrightarrow & A'S & B & \longrightarrow & B'S & & & \\ A & \longrightarrow & B'A_2 & B & \longrightarrow & A'B_2 & & & \\ A_2 & \longrightarrow & AA & B_2 & \longrightarrow & BB & & & \end{array} \right\}$$

13 Kellerautomaten (Pushdown-Automaten)

Ziel:

Einführung eines Automatenmodells, mit dem genau die kontextfreien Sprachen akzeptiert werden können.

Wir benötigen eine echte Erweiterung des Modells des endlichen Automaten.

Ansatz: Hinzunahme eines unbeschränkten Speichers.

Speicherinhalt ist jeweils ein Wort.

Zugriff auf Speicherinhalt über die Spitze: Der Wortanfang kann jeweils gelesen und modifiziert werden.

Wir sprechen von Kellerspeicher oder Stack oder Pushdown Stack.

Informelles Beispiel

Wir betrachten die Sprache $\{a^i b^i \mid i > 0\}$.

Das Akzeptieren eines Eingabewortes geschieht wie folgt:

1. **Aufbau des Kellers: für jedes gelesene a lege ein Symbol auf dem Keller ab (wir nehmen das Symbol Z)**
2. **Abbau des Kellers: für jedes gelesene b nehme ein Symbol Z vom Keller herunter**
3. **durch zwei Kontrollzustände sorge dafür, dass Aufbau und Abbau nur in dieser Reihenfolge möglich sind (Aufbau mit q_0, Abbau mit q_1, keine Rückkehr nach q_0)**
4. **Akzeptiere, wenn am Ende des Eingabewortes der Kellerboden erreicht ist.**

Der Keller realisiert in diesem Fall eine Zählervariable.

Kellerautomaten

Kellerautomaten entstehen aus endlichen Automaten durch

- Hinzunahme eines Kelleralphabets
- Erweiterung der Transitionen (es muss das Lesen und Ersetzen der Kellerspitze realisiert werden)

Kellerautomaten: Definition

Definition 8. *Ein* **Kellerautomat** *ist ein 6-Tupel* $\langle \Phi, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$ *bestehend aus:*

1. *einem* **Zustandsalphabet** Φ
2. *einem* **Eingabealphabet** Σ
3. *einem* **Kelleralphabet** Γ
4. *einer* **Übergangsrelation / Transitionsrelation** $\Delta \subseteq \Phi \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \times \Gamma \cup \{\epsilon\} \times \Gamma^* \times \Phi$
5. *einem* **Startzustand** q_0 *und*
6. *einer Menge von* **Endzuständen** $F \subset \Phi$.

Wirkung einer Transition

Bedeutung der Transition (p, a, Z, v, q):

In Zustand p, bei Eingabebuchstabe a und Symbol Z auf Kellerspitze:

> **Ersetze Z an Kellerspitze durch das Wort v, gehe zum nächsten Eingabebuchstaben und in den Zustand q über.**

Bei zweiter Komponente ε:

> **analog, ohne auf der Eingabe voranzuschreiten und ohne den Eingabebuchstaben zu lesen.**

Transition

(p, a, Z, v, q)

Transition

(p, a, Z, v, q)

aktueller Zustand

Transition

(p, a, Z, v, q)

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

Transition

oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -

(p, a, Z, v, q)

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

Transition

oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -

(p, a, Ż, v, q)

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

Wort, das auf den Stack gelegt wird
- push down -

Transition

oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -

neuer Zustand

$$(p, a, Z, v, q)$$

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

Wort, das auf den Stack gelegt wird
- push down -

Transition

oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -

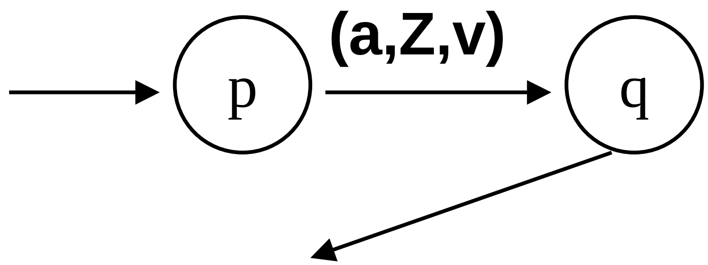
neuer Zustand

(p, a, Z, v, q)

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

Wort, das auf den Stack gelegt wird
- push down -



Transition

oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -

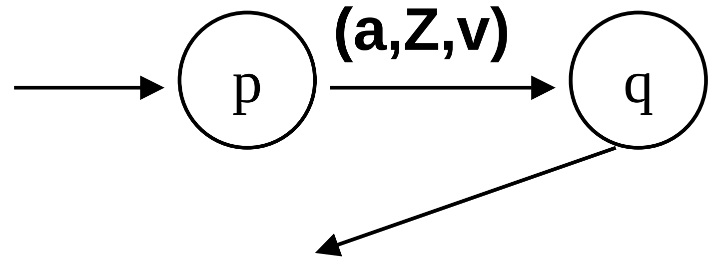
neuer Zustand

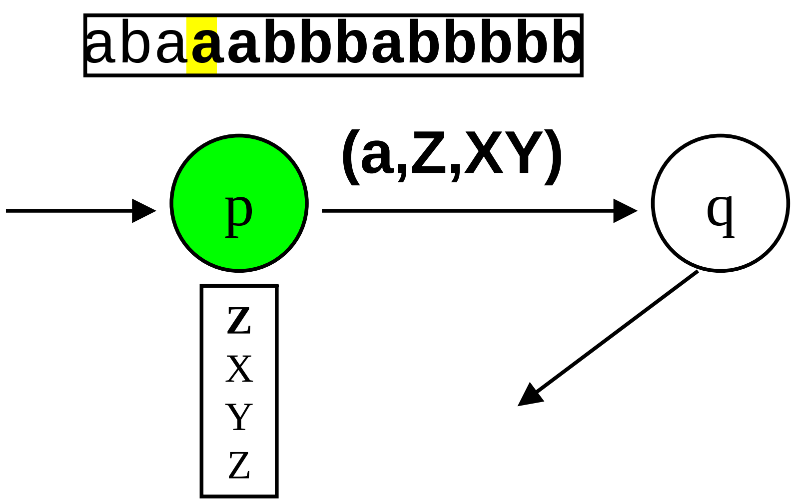
(p, a, Z, v, q)

aktueller Zustand

zu lesendes Eingabesymbol

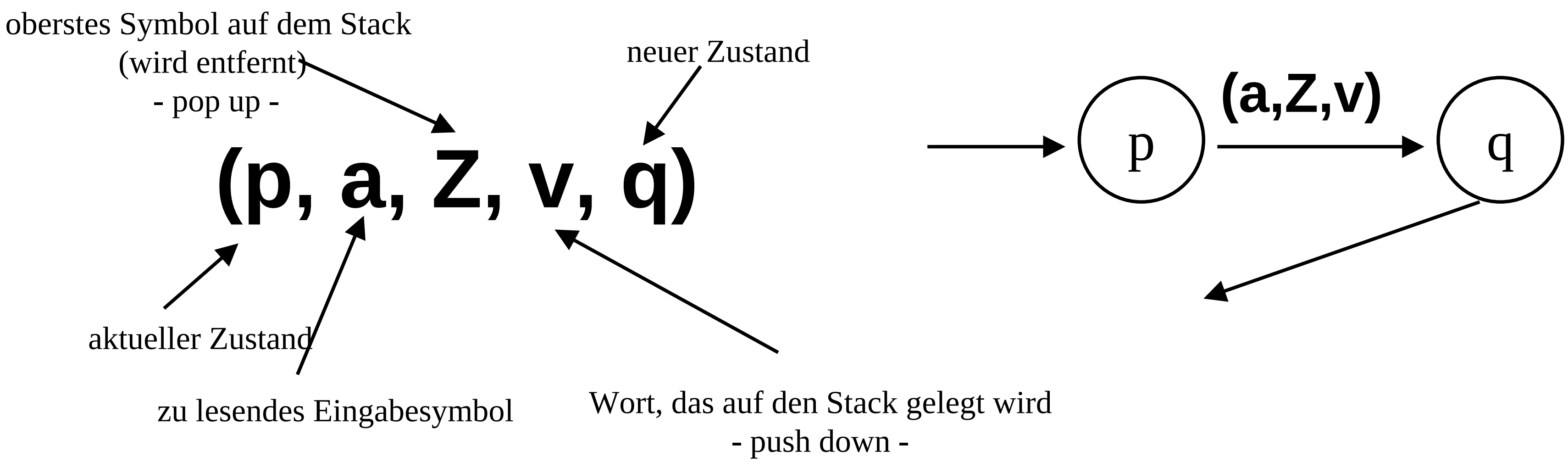
Wort, das auf den Stack gelegt wird
- push down -



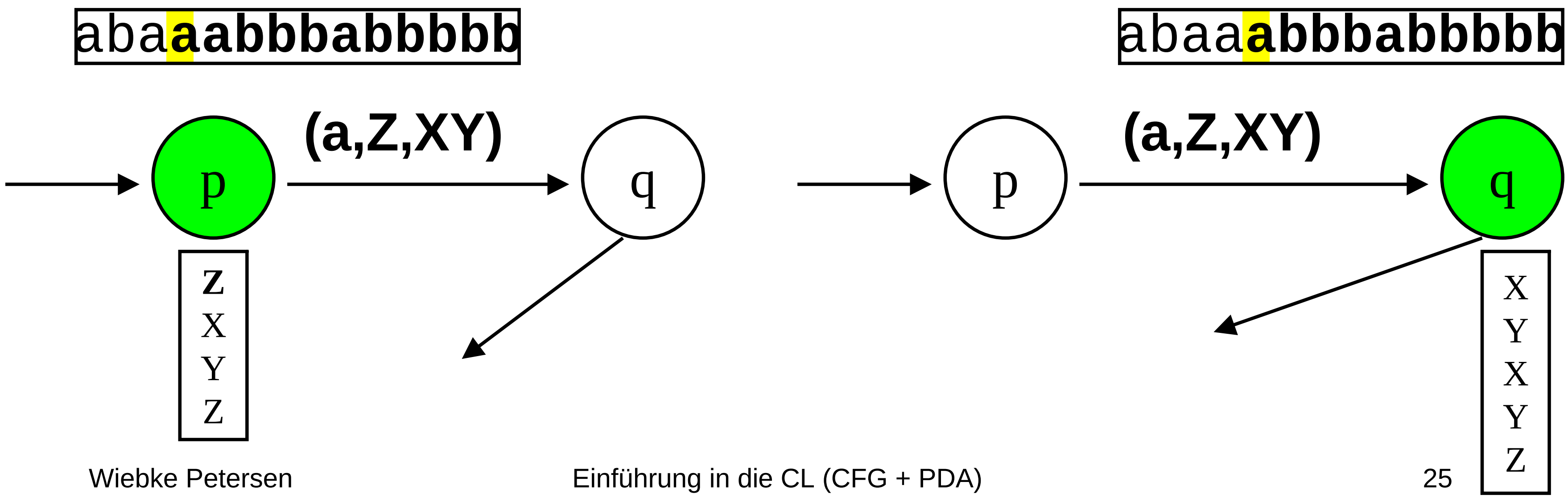


Wiebke Petersen Einführung in die CL (CFG + PDA) 25

Transition

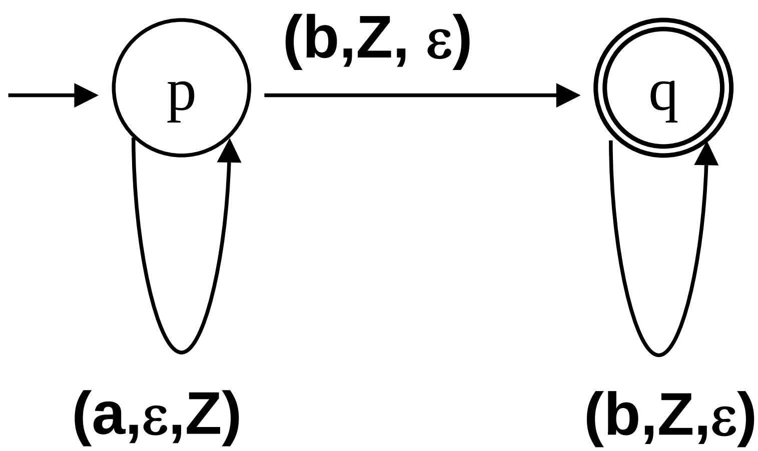


oberstes Symbol auf dem Stack
(wird entfernt)
- pop up -
neuer Zustand
(p, a, Z, v, q)
aktueller Zustand
zu lesendes Eingabesymbol
Wort, das auf den Stack gelegt wird
- push down -
p
(a,Z,v)
q



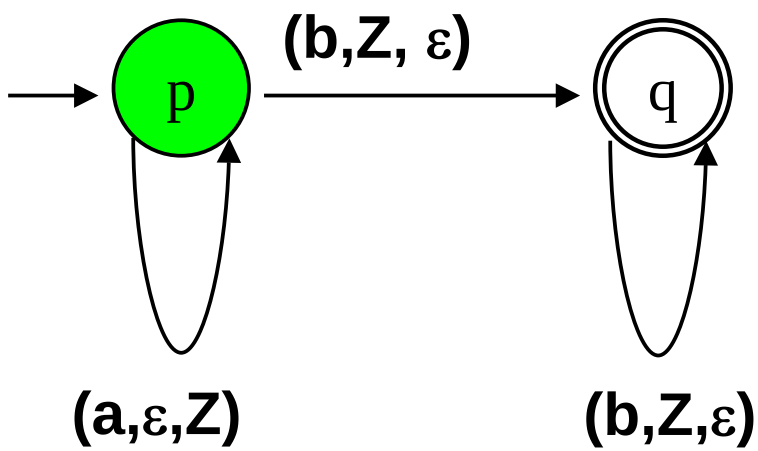
abaaabbbabbbbb
p
(a,Z,XY)
q
Z
X
Y
Z
abaaabbbabbbbb
p
(a,Z,XY)
q
X
Y
X
Y
Z
Wiebke Petersen
Einführung in die CL (CFG + PDA)
25

Beispiel eines Kellerautomaten



dieser Kellerautomat akzeptiert die Sprache $a^n b^n$

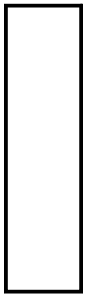
Arbeitsweise eines Kellerautomaten



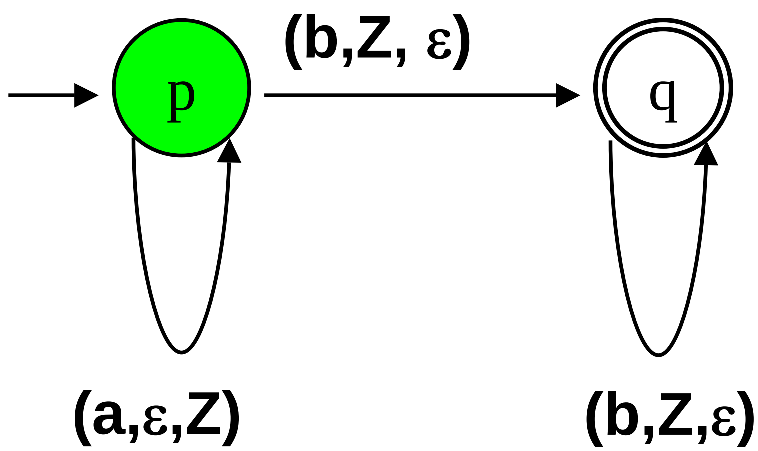
(noch) zu lesendes Wort:

a	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**

aktueller Stack:



Arbeitsweise eines Kellerautomaten



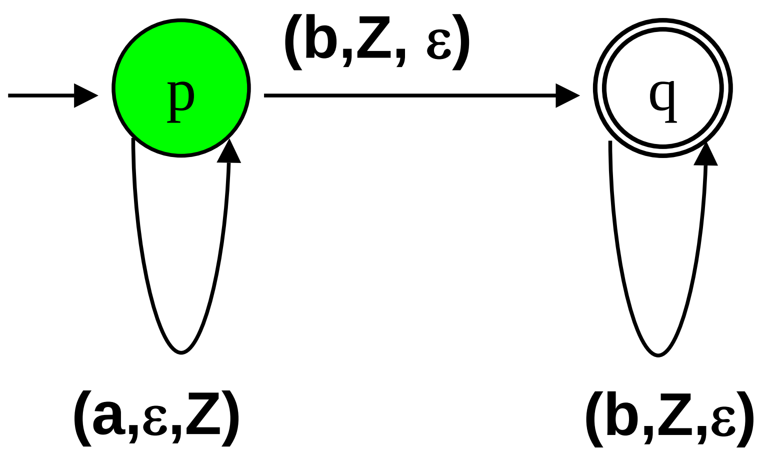
(noch) zu lesendes Wort:

a a b b b

aktueller Stack:

Z

Arbeitsweise eines Kellerautomaten



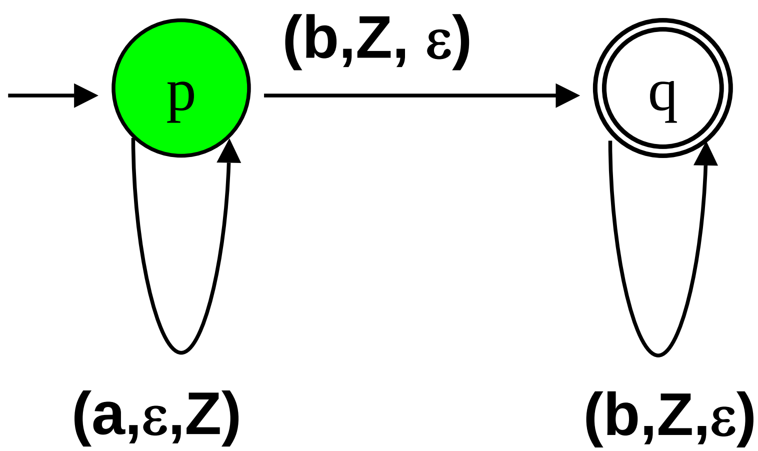
(noch) zu lesendes Wort:

a b b b

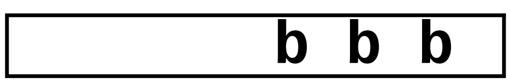
aktueller Stack:

Z
Z

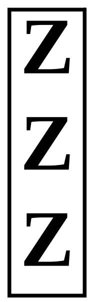
Arbeitsweise eines Kellerautomaten



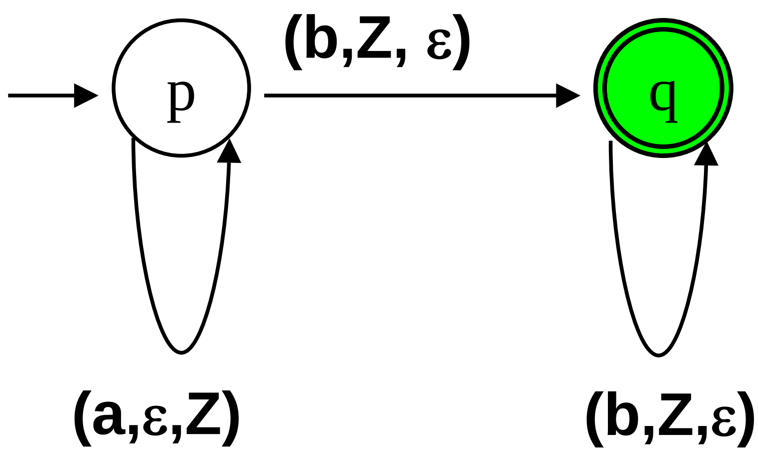
(noch) zu lesendes Wort:



aktueller Stack:



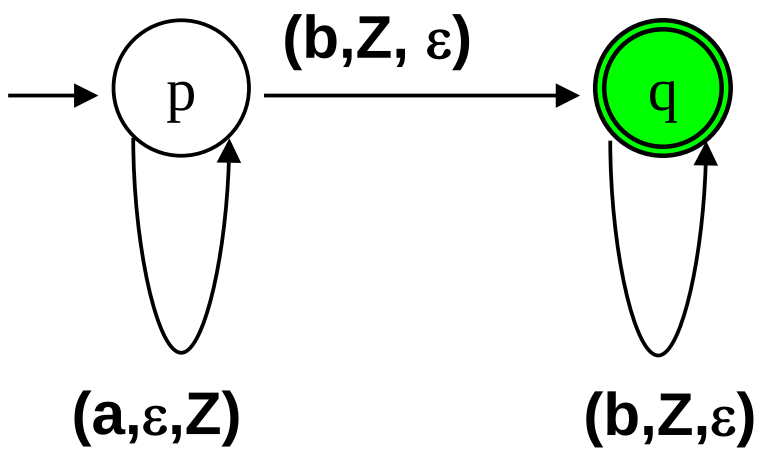
Arbeitsweise eines Kellerautomaten



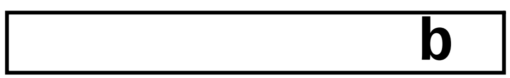
(noch) zu lesendes Wort: **b b**

aktueller Stack: **Z Z**

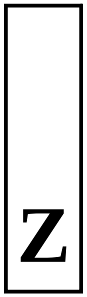
Arbeitsweise eines Kellerautomaten



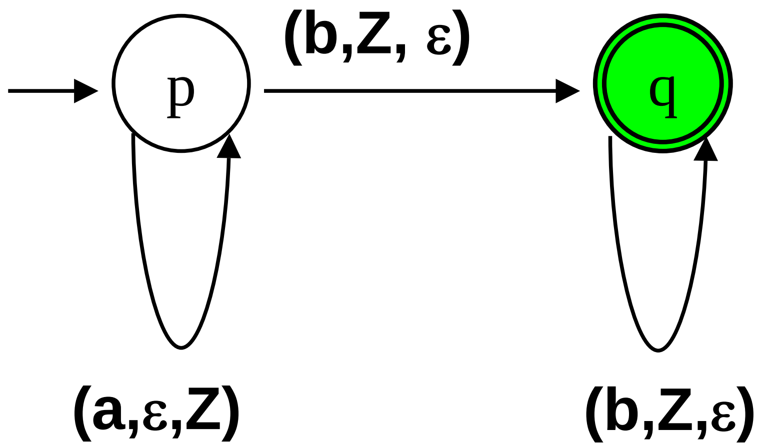
(noch) zu lesendes Wort:



aktueller Stack:



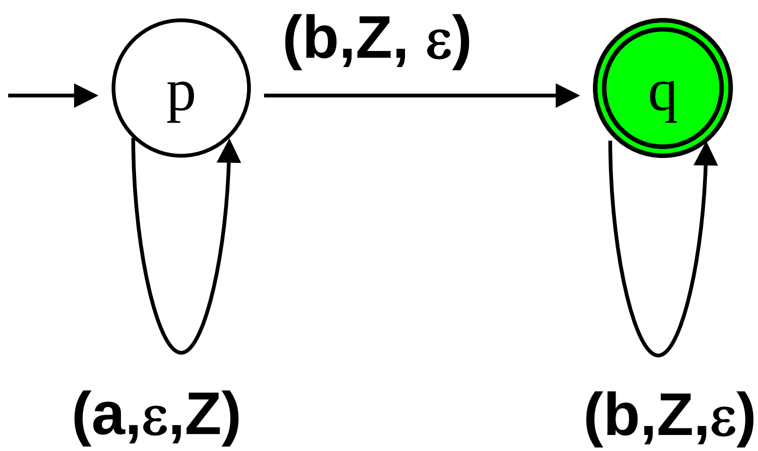
Arbeitsweise eines Kellerautomaten



(noch) zu lesendes Wort:

aktueller Stack:

Arbeitsweise eines Kellerautomaten

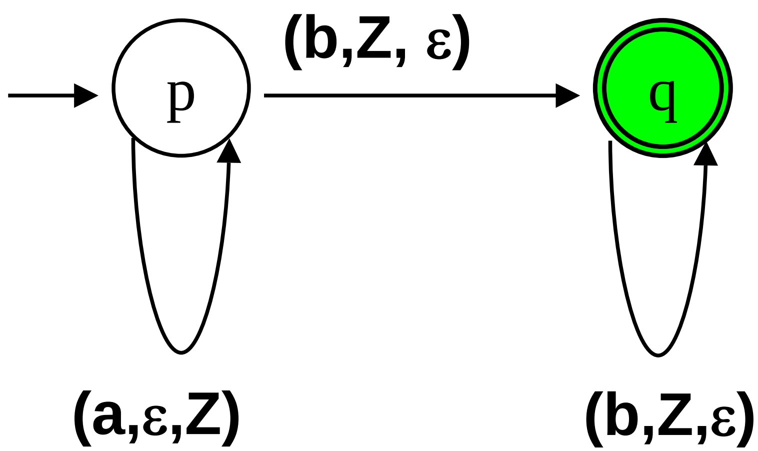


(noch) zu lesendes Wort:

aktueller Stack:

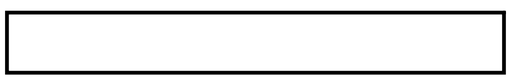
Das Wort ist abgearbeitet!

Arbeitsweise eines Kellerautomaten

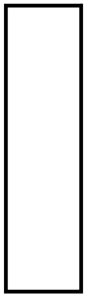


(noch) zu lesendes Wort:

aktueller Stack:

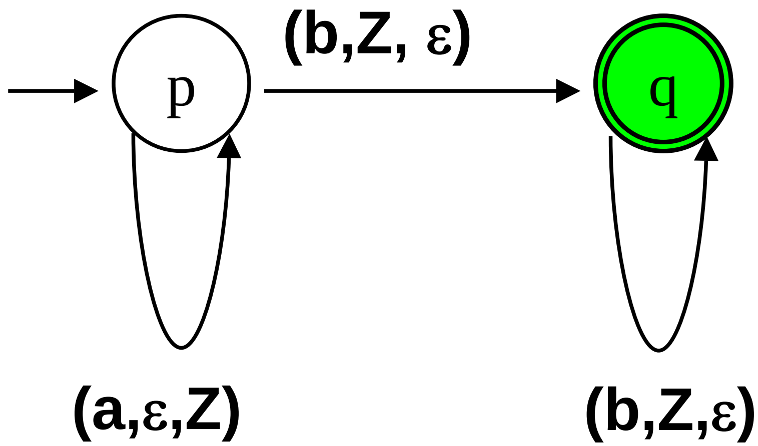


Das Wort ist abgearbeitet!



Der Stack ist leer!

Arbeitsweise eines Kellerautomaten



Der Automat befindet
sich in einem Endzustand!

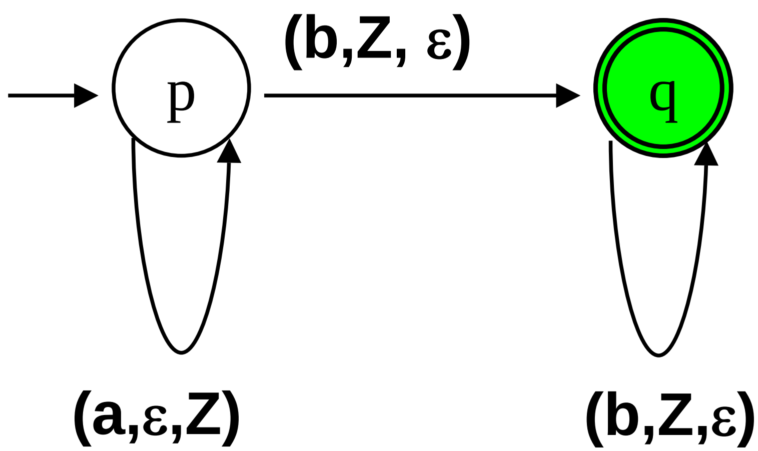
(noch) zu lesendes Wort:

Das Wort ist abgearbeitet!

aktueller Stack:

Der Stack ist leer!

Arbeitsweise eines Kellerautomaten



Der Automat befindet sich in einem Endzustand!

Darum akzeptiert der Kellerautomat das Wort!

(noch) zu lesendes Wort:

Das Wort ist abgearbeitet!

aktueller Stack:

Der Stack ist leer!

Von Grammatiken zu Kellerautomaten

Satz 9. *Zu einer kontextfreien Grammatik G kann man einen Kellerautomaten A konstruieren, der die von G generierte Sprache akzeptiert.*

Von Grammatiken zu Kellerautomaten

Satz 9. *Zu einer kontextfreien Grammatik G kann man einen Kellerautomaten A konstruieren, der die von G generierte Sprache akzeptiert.*

Konstruktionsvorschrift:
Sei $G = (N, T, S, P)$ die gegebene Grammatik. Konstruiere den Automaten $A = \langle \Phi, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$ wie folgt:

- $\Phi = \{q_0, q_1\}, \qquad \Sigma = T, \qquad \Gamma = T \cup N, \qquad F = \{q_1\},$

Von Grammatiken zu Kellerautomaten

Satz 9. *Zu einer kontextfreien Grammatik G kann man einen Kellerautomaten A konstruieren, der die von G generierte Sprache akzeptiert.*

Konstruktionsvorschrift:
Sei $G = (N, T, S, P)$ die gegebene Grammatik. Konstruiere den Automaten $A = \langle \Phi, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$ wie folgt:

- $\Phi = \{q_0, q_1\}, \qquad \Sigma = T, \qquad \Gamma = T \cup N, \qquad F = \{q_1\},$
- Δ enthält die folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \epsilon, \epsilon, S, q_1)$

Von Grammatiken zu Kellerautomaten

Satz 9. *Zu einer kontextfreien Grammatik G kann man einen Kellerautomaten A konstruieren, der die von G generierte Sprache akzeptiert.*

Konstruktionsvorschrift:
Sei $G = (N, T, S, P)$ die gegebene Grammatik. Konstruiere den Automaten $A = \langle \Phi, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$ wie folgt:

- $\Phi = \{q_0, q_1\}, \quad \Sigma = T, \quad \Gamma = T \cup N, \quad F = \{q_1\},$
- Δ enthält die folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \epsilon, \epsilon, S, q_1)$
  - für jede Regel $B \longrightarrow \beta$ der Grammatik eine Transition $(q_1, \epsilon, B, \beta, q_1)$

Von Grammatiken zu Kellerautomaten

Satz 9. *Zu einer kontextfreien Grammatik G kann man einen Kellerautomaten A konstruieren, der die von G generierte Sprache akzeptiert.*

Konstruktionsvorschrift:
Sei $G = (N, T, S, P)$ die gegebene Grammatik. Konstruiere den Automaten $A = \langle \Phi, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$ wie folgt:

- $\Phi = \{q_0, q_1\}, \qquad \Sigma = T, \qquad \Gamma = T \cup N, \qquad F = \{q_1\},$
- Δ enthält die folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \epsilon, \epsilon, S, q_1)$
  - für jede Regel $B \longrightarrow \beta$ der Grammatik eine Transition $(q_1, \epsilon, B, \beta, q_1)$
  - für jedes Symbol $a \in T$ eine Transition $(q_1, a, a, \epsilon, q_1)$.

Wirkungsweise der Konstruktion

- Für das Akzeptieren einer kontextfreien Sprache genügt ein Kellerautomat mit nur zwei Zuständen, wobei die einzige Aufgabe des Startzustands darin besteht, das Startsymbol S der Grammatik in den Keller zu legen.

Wirkungsweise der Konstruktion

- Für das Akzeptieren einer kontextfreien Sprache genügt ein Kellerautomat mit nur zwei Zuständen, wobei die einzige Aufgabe des Startzustands darin besteht, das Startsymbol S der Grammatik in den Keller zu legen.
- Während der eigentlichen Rechnung befindet sich der Automat permanent in dem selben Zustand, die Rechnung findet nur in dem Keller statt.

Wirkungsweise der Konstruktion

- Für das Akzeptieren einer kontextfreien Sprache genügt ein Kellerautomat mit nur zwei Zuständen, wobei die einzige Aufgabe des Startzustands darin besteht, das Startsymbol S der Grammatik in den Keller zu legen.
- Während der eigentlichen Rechnung befindet sich der Automat permanent in dem selben Zustand, die Rechnung findet nur in dem Keller statt.
- Der konstruierte Automat vollzieht zwei verschiedene Arbeitsschritte:
  - Nicht-Leseschritt mit Bezug auf Grammatikregel $B \longrightarrow \beta$:
    Ersetze die Kellerspitze B mit β
  - Leseschritte:
    Lies ein $a \in T$ der Eingabekette und entferne a von der Kellerspitze.

Hausaufgaben

1. Beschreiben Sie die Sprache, die von der Grammatik auf Folie 4 generiert wird.
2. Geben Sie die Grammatik von Folie 4 in der Chomsky-Normalform wieder.
3. Zeichnen Sie alle Ableitungsbäume für das Wort $aababb$ der Sprache L_4 von Folie 5.
4. Gebe eine Grammatik an, die die Sprache der wohlgeformten arithmetischen Terme über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (,), +, -, \cdot, :\}$ generiert.
5. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen L_1, L_2 und L_3 von Folie 5 an.
6. w^R ist das Wort w in umgekehrter Reihenfolge. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache $L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ an. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der L akzeptiert.
7. Gegeben sei folgende Regelmenge einer Grammatik G:

$$\begin{array}{lllllllll} S & \rightarrow & aB & S & \rightarrow & bA & & & \\ A & \rightarrow & a & A & \rightarrow & aS & A & \rightarrow & bAA \\ B & \rightarrow & b & B & \rightarrow & bS & B & \rightarrow & aBB \end{array}$$

   Welche Sprache wird von der Grammatik generiert?
   Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache akzeptiert.